

Processus ponctuels déterminantaux sur des variétés complexes

Thibaut Lemoine

CNRS, Université de Lille

Journées de probabilités 2023, Angers



Plan de l'exposé

1 Motivations

- Généralisation géométrique de modèles algébriques
- Un exemple fondateur : l'effet Hall quantique

2 Processus ponctuels déterminantaux

- Processus ponctuels
- Observables
- Processus déterminantaux
- Ensemble de Ginibre

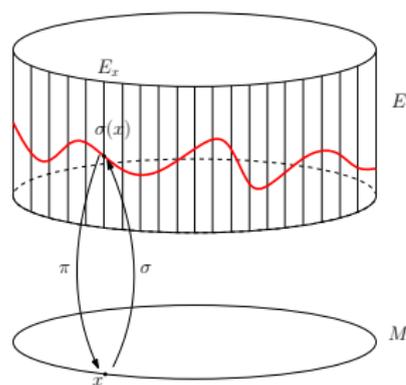
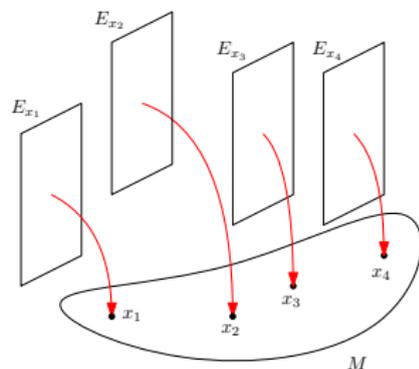
3 Version géométrique

- Noyau de Bergman
- Développements asymptotiques
- DPP à noyau de Bergman
- Généralisation
- Application à l'intégration numérique

Motivations

1.1 - Généralisation géométrique de modèles algébriques

- Un **fibré vectoriel de rang r** au-dessus d'une variété réelle M est la donnée, au-dessus de tout $x \in M$, d'un espace vectoriel réel de dimension r E_x , de sorte que le recollement des fibres soit lisse. On obtient une projection $\pi : E \rightarrow M$ entre deux variétés, et $E_x = \pi^{-1}(x)$ pour tout x .
- Une **section** d'un fibré $E \rightarrow M$ est la donnée, pour tout $x \in M$, d'un élément $\sigma(x) \in E_x$ de sorte que $\pi \circ \sigma(x) = x$ pour tout x .



Exemples

Les sections du fibré tangent (resp. cotangent) forment les champs de vecteurs (resp. les 1-formes différentielles).

1.1 - Généralisation géométrique de modèles algébriques

Les espaces de sections de fibrés vectoriels sur des variétés (réelles ou complexes) généralisent les espaces fonctionnels "classiques" dans \mathbb{R}^d ou \mathbb{C}^d . Ex: sections holomorphes, sections de classe L^p .

	Modèle algébrique	Modèle géométrique
Fonctions aléatoires	Racines de polynômes aléatoires	Zéros de sections holomorphes aléatoires
Configurations aléatoires	Ensembles orthogonaux	DPP à noyau de Bergman

1.2 - Un exemple fondateur : l'effet Hall quantique

Le modèle

On considère un système d'électrons dans le plan complexe, soumis à un champ magnétique constant perpendiculaire. La fonction d'onde à N particules dans l'état fondamental est

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{\sqrt{Z_N}} \prod_{i < j} (z_i - z_j) e^{-\frac{1}{4} B \sum_i |z_i|^2},$$

et sa norme au carré s'interprète comme une densité jointe de probabilité.

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont les coefficients satisfont

$$A_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}, \quad (x_{jk}, y_{jk}) \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{B}).$$

Alors (Ginibre, '65) la loi de ses valeurs propres s'écrit

$$p(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{Z_N} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 e^{-\frac{1}{2} B \sum_i |z_i|^2} = \|\Psi(z_1, \dots, z_N)\|^2.$$

1.2 - Un exemple fondateur : l'effet Hall quantique

Généralisation géométrique (Douglas–Klevtsov '08)

Soit (M, ω) une variété kählérienne de dimension d . On modélise le flux d'un champ magnétique comme la **courbure d'un fibré holomorphe hermitien en droites** (L^k, h^k) sur M . Les fonctions d'onde sont dans $H^0(M, L^k)$, un espace de Hilbert de dimension finie N_k pour le produit scalaire

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_M h_x^k(\psi_1(x), \psi_2(x)) \frac{\omega^d(x)}{d!}.$$

Si $\{\psi_\ell\}$ est une BON, la fonction d'onde à N_k particules est le déterminant de Slater

$$\Psi(x_1, \dots, x_{N_k}) = \frac{1}{\sqrt{N_k!}} \det(\psi_\ell(x_m)).$$

- Y a-t-il une analogie avec les matrices aléatoires comme dans le plan ?
- Que se passe-t-il quand $k \rightarrow \infty$ (fort champ magnétique) ?

Processus ponctuels déterminantaux

2.1 - Processus ponctuels

Soit E un espace polonais localement compact, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$, et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un **processus ponctuel simple** est une configuration aléatoire, *i.e.* un sous-ensemble aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(E)$ localement fini. On l'identifie à sa mesure de comptage

$$\mu = \sum_{x \in X} \delta_x.$$

Exemples

- Les racines d'un polynôme aléatoire
- Les valeurs propres d'une matrice aléatoire
- Les systèmes de particules en interaction (Riesz, Coulomb...)
- Processus ponctuel de Poisson

2.2 - Observables

- Nombre de particules : pour $B \in \mathcal{B}(E)$, $N_B(X) = \int_B d\mu = \#(B \cap X)$.
- Mesures moment factorielles : pour $n \geq 1$,

$$\mu^{(n)} = \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq N \\ i_1 \neq \dots \neq i_n}} \delta_{X_{i_1}, \dots, X_{i_n}} \right],$$

Si $\mu^{(n)}$ est à densité par rapport à $\lambda^{\otimes n}$, sa densité s'appelle la **fonction de corrélation à n points**. Par exemple :

- ▶ $\mu^{(1)}(B) = \mathbb{E}[N_B(X)]$
- ▶ $\mu^{(2)}(B \times B) = \mathbb{E}[N_B(X)(N_B(X) - 1)]$.
- ▶ $\mu^{(N)}(B_1 \times \dots \times B_N) = N! \mathbb{P}(X \subset B_1 \times \dots \times B_N)$

Proposition

Si (X_1, \dots, X_N) v.a. sur E deux à deux distinctes p.s. et de densité $f : E^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ symétrique, on a pour $n \leq N$:

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int_{E^{N-n}} f(x_1, \dots, x_N) \lambda^{\otimes N-n}(dx_{n+1} \cdots dx_N).$$

2.3 - Processus déterminantaux

Un processus ponctuel μ est dit **déterminantal de noyau** $K : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$ si

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det(K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}, \forall n \geq 1.$$

→ L'étude d'un tel processus se rapporte à l'étude de son noyau.

Exemples

- Valeurs propres de certains ensembles classiques de matrices aléatoires (Ginibre, GUE/GOE/GSE, CUE)
- Zéros de fonctions analytiques gaussiennes
- Arbres couvrants uniformes
- Mesures de Schur sur des diagrammes de Young

2.3 - Processus déterminantaux

Théorème (Borodin '99)

Soit $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ une famille orthonormale de $L^2(E, \lambda)$. Le noyau

$$K_N(x, y) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \overline{\phi_i(y)}$$

est reproduisant sur le sous-espace de $L^2(E)$ engendré par les ϕ_i . De plus, si X_1, \dots, X_N ont pour loi jointe

$$\frac{1}{N!} |\det(\phi_i(x_j))|^2 d\lambda^{\otimes N}(x_1, \dots, x_N),$$

alors le processus ponctuel associé est déterminantal de noyau K_N .

- (X_1, \dots, X_N) est appelé un **ensemble orthogonal**.
- K_N est appelé **noyau de Christoffel–Darboux** lorsque les ϕ_i sont des polynômes orthogonaux.

2.4 - Ensemble de Ginibre

La densité des valeurs propres de matrices de Ginibre vérifie

$$p(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{Z_N} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 e^{-\frac{1}{2} \sum_i |z_i|^2} = \frac{1}{Z_N} \det(s_i(z_j)),$$

où $s_i(z) = z^{i-1} e^{-\frac{1}{2}|z|^2}$. On peut montrer que c'est un DPP de noyau

$$K_N^{Gin}(z, w) = \frac{1}{\pi} \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\ell!} (z\bar{w})^\ell e^{-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|w|^2}.$$

Quand $N \rightarrow \infty$ on obtient l'**ensemble de Ginibre infini**, de noyau

$$K_\infty^{Gin}(z, w) = \frac{1}{\pi} e^{z\bar{w} - \frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|w|^2}$$

Version géométrique

3.1 - Noyau de Bergman

Soit M une variété complexe compacte de dimension d , et L un fibré holomorphe en droites au-dessus de M muni d'une métrique hermitienne continue h telle que, localement, $h = e^{-\phi}$.

L'espace de Hilbert des sections holomorphes

Si μ est une mesure finie positive sur M , $H^0(M, L^k)$ est un espace de Hilbert de dimension $N_k < \infty$ pour le produit scalaire

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{(k\phi, \mu)} = \int_M \langle s_1(x), s_2(x) \rangle_{k\phi} d\mu(x).$$

- N_k s'obtient par la formule de Grothendieck–Riemann–Roch, et en particulier $N_k \sim \text{vol}(L) \frac{k^d}{d!}$.

Noyau de Bergman

Le **noyau de Bergman** est le noyau de Schwartz B_k de la projection orthogonale $\Pi_k : L^2(M, L^k) \rightarrow H^0(M, L^k)$. Si $\{\psi_\ell\}$ est une BON de $H^0(M, L^k)$,

$$B_k(x, y) = \sum_{\ell=1}^{N_k} \psi_\ell(x) \otimes \overline{\psi_\ell(y)}.$$

3.2 - Développements asymptotiques

Supposons que μ est la mesure borélienne associée à une forme de volume riemannien sur M , et la matrice $R^L = \left(\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)$ est définie positive pour tout x .

Théorème (Tian '90, Catlin '97, Zelditch '98)

Il existe des coefficients lisses $(b_j)_{j \geq 1}$ tels que pour tout $r \geq 1$,

$$B_k(x, x) = \sum_{j=0}^r b_j(x) k^{d-j} + O(k^{d-r-1}).$$

Théorème (Bleher–Schiffman–Zelditch '00, Shiffman–Zelditch '02, Ma–Marinescu '06, Berman–Berndtsson–Sjöstrand '08)

Soit (z_1, \dots, z_N) un système de coordonnées au voisinage de $x_0 \in M$. Il existe un noyau B_∞ tel que

$$B_k \left(\frac{z}{\sqrt{k}}, \frac{z'}{\sqrt{k}} \right) = B_\infty(z, z') k^d + O(k^{d-\frac{1}{2}}).$$

3.3 - DPP à noyau de Bergman

Soit (X_1, \dots, X_{N_k}) une famille de v.a. sur M de loi jointe

$$d\mathcal{P}_\phi(x_1, \dots, x_{N_k}) = \frac{1}{N_k!} \|\det(\psi_i(x_j))\|_{k\phi}^2 d\mu^{\otimes N_k}(x_1, \dots, x_{N_k}),$$

où (ψ_i) BON de $H^0(M, L^k)$.

Exemple

Si on prend la sphère de Riemann $M = S^2$ munie de sa métrique ronde, on obtient

$$\frac{1}{(k+1)!} |\det(z_\ell^{m-1})|^2 \prod_{\ell=1}^{k+1} \frac{idz_\ell \wedge d\bar{z}_\ell}{2(1+|z_i|^2)^{k+2}}$$

- Même loi que les valeurs propres de AB^{-1} , où $A, B \in \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{C})$ à coefficients i.i.d. gaussiens complexes standard (Krishnapur '09)
- Noyau de Bergman:

$$B_k(z_1, z_2) = (k+1) \frac{(1+z_1\bar{z}_2)^k}{(1+|z_1|^2)^{\frac{k}{2}} (1+|z_2|^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

3.3 - DPP à noyau de Bergman

Théorème (TL '22)

C'est un processus ponctuel déterminantal de noyau B_k :

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det(B_k(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \forall 1 \leq n \leq N_k.$$

Idée de preuve :

$$\det(B_k(x_i, x_j)) \stackrel{\text{“} = \text{”}}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{N_k} s_{i_1}(x_1) \otimes \overline{s_{i_1}}(x_{\sigma(1)}) \otimes \dots \otimes s_{i_n}(x_n) \otimes \overline{s_{i_n}}(x_{\sigma(n)})}_{\text{fibre au-dessus de } (x_1, x_{\sigma(1)}, \dots, x_n, x_{\sigma(n)})}$$

- En utilisant des arguments de dualité, on retombe sur nos pieds :

$$\det(B_k(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{N_k} \prod_{j=1}^n \langle s_{i_j}(x_j), s_{i_{\sigma^{-1}(j)}}(x_j) \rangle_{k\phi}.$$

- Reste à adapter les arguments des ensembles orthogonaux.

3.3 - DPP à noyau de Bergman

Théorème (Berman '18, TL '22)

La fonction de corrélation à n points admet la limite d'échelle suivante en coordonnées locales autour de $x \in M$:

$$\frac{1}{k^{nd}} \rho_n \left(\frac{u_1}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{u_n}{\sqrt{k}} \right) = \det(B_\infty(u_i, u_j)) + O(k^{-\frac{1}{2}}).$$

- Le noyau B_∞ s'apparente au noyau de l'ensemble de Ginibre infini :

$$B_\infty(z, w) = \frac{\det R^L}{\pi^d} e^{-\sum_i (\lambda_i z_i \bar{w}_i - \frac{1}{2}|z_i|^2 - \frac{1}{2}|w_i|^2)}, \text{ où } \sigma(R^L) = (\lambda_1, \dots, \lambda_d).$$

- L'universalité découle directement de résultats profonds de géométrie complexe : **application de résultats géométriques à un modèle probabiliste !**
- D'autres résultats sont connus : convergence en probabilité (Berman '18, TL '22), TCL (Berman '18), grandes déviations (Berman '14), cumulants de N_B pour B à bord lisse (Charles–Estienne '20)

3.4 - Généralisation

On peut considérer des processus plus généraux, (X_1, \dots, X_{N_k}) de loi

$$d\mathcal{P}_\phi^V(x_1, \dots, x_{N_k}) = \frac{1}{Z_{N_k}(\phi, V)} \|\det(\psi_i(z_j))\|_{k\phi}^2 e^{-k \sum_i V(x_i)} d\mu^{\otimes N_k}(x_1, \dots, x_{N_k}),$$

où $\{\psi_i\}$ BON de $H^0(M, L^k)$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(k\phi, \mu)}$ et $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel continu.

Théorème (TL '22)

La suite des mesures empiriques $\mu_k = \sum_i \delta_{X_i}$ satisfait un principe de grandes déviations de vitesse kN_k et de bonne fonction de taux la transformée de Legendre de la fonctionnelle de Mabuchi.

- La fonctionnelle de Mabuchi a été introduite par Mabuchi ('86) et notamment popularisée par les travaux de Donaldson ('05).
- La preuve du théorème combine une application du théorème de Gärtner–Ellis abstrait et un contrôle de la fonction

$$K_\phi^V(t) = \log \mathbb{E}_\phi[e^{-t \sum_i V(X_i)}] = \log \det(\langle \psi_i, \psi_j \rangle_{\phi+tV}).$$

3.5 - Application à l'intégration numérique

Théorème (Bardenet–TL '23+)

Soit (ϕ, μ) une mesure pondérée régulière telle que $\partial\bar{\partial}\phi$ is positive. Pour toute $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ lipschitzienne :

$$\sqrt{N_k^{1+\frac{1}{d}} \left(\sum_{i=1}^{N_k} \frac{f(X_i)}{B_k(X_i, X_i)} - \int_M f(x) d\mu(x) \right)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma_{f, \phi}^2). \quad (1)$$

- Meilleure vitesse de convergence que du Monte Carlo classique
- Contrôle possible de la variance via le choix de ϕ .
- Joli résultat théorique mais compliqué à mettre en pratique : le plus souvent, B_k n'a pas de formule fermée et on ne sait pas simuler (X_1, \dots, X_{N_k}) .

Merci !