



Approximation forte de quelques diffusions

S. Herrmann

Université de Bourgogne, Dijon, France

en collaboration avec M. Deaconu (Université de Lorraine, INRIA)

22 juin 2023

Au menu...

- 1 Approximation de trajectoires continues par l'utilisation d'une méthode de discrétisation : introduction.
- 2 Approximation forte : le cas brownien
- 3 Approximation forte : quelques diffusions.
- 4 Approximation forte : le processus de Bessel

Introduction aux méthodes de discrétisation

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique à trajectoires continues (mvt Brownien, processus de Bessel, solution d'EDS,...). On considère une variable aléatoire Z dépendant de la trajectoire de X .

But : *trouver une valeur approchée de Z , une méthode pour générer cette variable par une méthode numérique.*

Introduction aux méthodes de discrétisation

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique à trajectoires continues (mvt Brownien, processus de Bessel, solution d'EDS,...). On considère une variable aléatoire Z dépendant de la trajectoire de X .

But : *trouver une valeur approchée de Z , une méthode pour générer cette variable par une méthode numérique.*

Exemple. Le cas d'une solution d'EDS

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x < L.$$

But: simulation du tps d'arrêt $Z := \inf\{t \geq 0 : X_t = L\}$.

Introduction aux méthodes de discrétisation

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique à trajectoires continues (mvt Brownien, processus de Bessel, solution d'EDS,...). On considère une variable aléatoire Z dépendant de la trajectoire de X .

But : *trouver une valeur approchée de Z , une méthode pour générer cette variable par une méthode numérique.*

Exemple. Le cas d'une solution d'EDS

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x < L.$$

But: simulation du tps d'arrêt $Z := \inf\{t \geq 0 : X_t = L\}$.

Approche générale: subdivision $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ de pas ϵ .

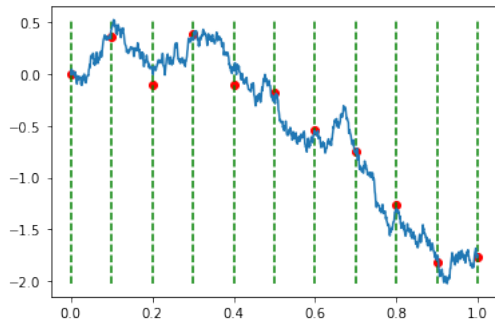
→ Interpolation linéaire ou constante par morceaux de

$$X_{t_{n+1}}^\epsilon = X_{t_n}^\epsilon + \epsilon b(X_{t_n}^\epsilon) + \sqrt{\epsilon} \sigma(X_{t_n}^\epsilon) G_n, \quad n \geq 0.$$

→ approcher Z par $Z^\epsilon := \inf\{t \in \epsilon\mathbb{N} : X_t^\epsilon \geq L\}$.

Problèmes & améliorations (Broadie-Glassermann-Kou, Gobet-Menziozi,

Giraudo-Saccerdote-Zucca,...)



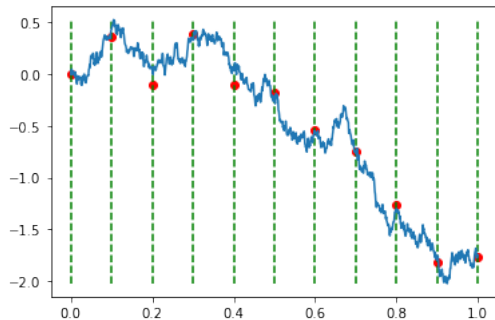
Critères de convergence sous des hypothèses de régularité (Clark-Cameron,...):

$$\forall p \in \mathbb{N},$$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} (X_t - X_t^\epsilon)^{2p} \right] \leq C \epsilon^p.$$

Références: livre de Kloeden-Platen, synthèse Jourdain & Kohatsu-Higa,...

Méthodes de discrétisation plus élaborée pour améliorer l'ordre de cv L^2 .



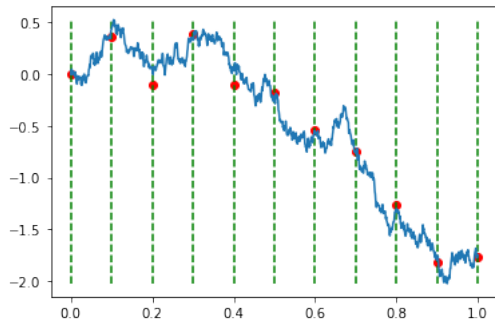
Critères de convergence sous des hypothèses de régularité (Clark-Cameron,...):

$$\forall p \in \mathbb{N},$$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} (X_t - X_t^\epsilon)^{2p} \right] \leq C\epsilon^p.$$

Références: livre de Kloeden-Platen, synthèse Jourdain & Kohatsu-Higa,...

Méthodes de discrétisation plus élaborée pour améliorer l'ordre de cv L^2 .
 → souhait de remplacer la CV L^2 par une cv plus forte dans les cas où Z dépend très fortement de la trajectoire (pas de façon continue).



Critères de convergence sous des hypothèses de régularité (Clark-Cameron,...):

$$\forall p \in \mathbb{N},$$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} (X_t - X_t^\epsilon)^{2p} \right] \leq C\epsilon^p.$$

Références: livre de Kloeden-Platen, synthèse Jourdain & Kohatsu-Higa,...

Méthodes de discrétisation plus élaborée pour améliorer l'ordre de cv L^2 .
 → souhait de remplacer la CV L^2 par une cv plus forte dans les cas où Z dépend très fortement de la trajectoire (pas de façon continue).

Objectif. Trouver deux courbes qui contrôlent la trajectoire ($X_t, t \leq T$):

$$X_t^{\uparrow, \epsilon} \geq X_t \geq X_t^{\downarrow, \epsilon}, \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} (X_t^{\uparrow, \epsilon} - X_t^{\downarrow, \epsilon}) = 0 \quad \text{p.s.}$$

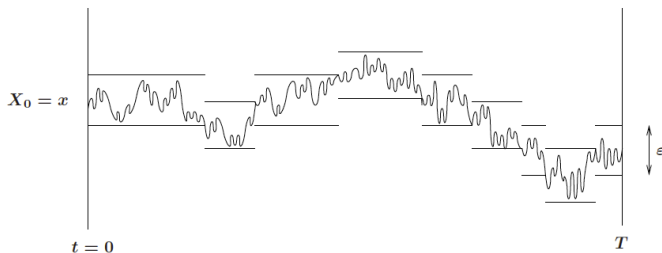
→ permet d'encadrer le temps de passage par ex.

Definition

Le processus stochastique (y_t^ϵ) est une **approximation ϵ -forte** de la diffusion (X_t) s'il existe un processus (x_t^ϵ) satisfaisant

$$\sup_{t \in [0, T]} |X_t - x_t^\epsilon| \leq \epsilon \quad \text{p.s.}$$

et tel que les processus (y_t^ϵ) et (x_t^ϵ) aient la même loi.



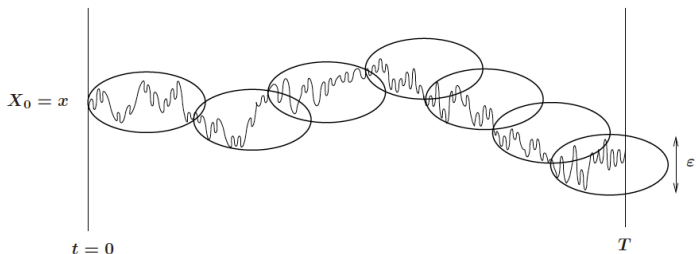
Références: Chen-Huang (13), Casella-Roberts (08),...

Definition

Le processus stochastique (y_t^ϵ) est une **approximation ϵ -forte** de la diffusion (X_t) s'il existe un processus (x_t^ϵ) satisfaisant

$$\sup_{t \in [0, T]} |X_t - x_t^\epsilon| \leq \epsilon \quad \text{p.s.}$$

et tel que les processus (y_t^ϵ) et (x_t^ϵ) aient la même loi.



Ici l'approximation est le prolongement constant par morceaux des points de sortie de sphéroïdes. Ces points appartiennent vraiment à la trajectoire (\neq du schéma d'Euler-Maruyama), ils constituent **le squelette** du processus.

Construction de l'approximation forte pour le mouvement brownien

On définit le squelette $(s_n^\epsilon, x_n^\epsilon) = (\text{tps de sortie cumulé, valeur de sortie})$ d'une suite particulière de sphéroïdes particulière pour X .

Construction de l'approximation forte pour le mouvement brownien

On définit le squelette $(s_n^\epsilon, x_n^\epsilon) = (\text{tps de sortie cumulé, valeur de sortie})$ d'une suite particulière de sphéroïdes particulière pour X .

- Les sphéroïdes sont définies par leurs frontières $\phi_\epsilon(t)$ t.q.:

$$\phi_\epsilon(0) = 0 = \phi_\epsilon(r_\epsilon) \text{ et } 0 < \phi_\epsilon(t) \leq \epsilon, \forall t \in]0, r_\epsilon[.$$

Initialisation $(s_0^\epsilon, x_0^\epsilon) = (0, x)$ correspondant à $X_0 = x$.

Construction de l'approximation forte pour le mouvement brownien

On définit le squelette $(s_n^\epsilon, x_n^\epsilon) = (\text{tps de sortie cumulé, valeur de sortie})$ d'une suite particulière de sphéroïdes particulière pour X .

- Les sphéroïdes sont définies par leurs frontières $\phi_\epsilon(t)$ t.q.:

$$\phi_\epsilon(0) = 0 = \phi_\epsilon(r_\epsilon) \text{ et } 0 < \phi_\epsilon(t) \leq \epsilon, \forall t \in]0, r_\epsilon[.$$

Initialisation $(s_0^\epsilon, x_0^\epsilon) = (0, x)$ correspondant à $X_0 = x$.

On définit la suite de temps successifs de sortie

$$s_{n+1}^\epsilon := \inf\{t \geq s_n^\epsilon : |X_t - X_{s_n^\epsilon}| \geq \phi_\epsilon(t - s_n^\epsilon)\}$$

and $x_n^\epsilon := X_{s_n^\epsilon}$

Construction de l'approximation forte pour le mouvement brownien

On définit le squelette $(s_n^\epsilon, x_n^\epsilon) = (\text{tps de sortie cumulé, valeur de sortie})$ d'une suite particulière de sphéroïdes particulière pour X .

- Les sphéroïdes sont définies par leurs frontières $\phi_\epsilon(t)$ t.q.:

$$\phi_\epsilon(0) = 0 = \phi_\epsilon(r_\epsilon) \text{ et } 0 < \phi_\epsilon(t) \leq \epsilon, \forall t \in]0, r_\epsilon[.$$

Initialisation $(s_0^\epsilon, x_0^\epsilon) = (0, x)$ correspondant à $X_0 = x$.

On définit la suite de temps successifs de sortie

$$s_{n+1}^\epsilon := \inf\{t \geq s_n^\epsilon : |X_t - X_{s_n^\epsilon}| \geq \phi_\epsilon(t - s_n^\epsilon)\}$$

and $x_n^\epsilon := X_{s_n^\epsilon}$

- Alors $(s_n^\epsilon)_{n \geq 0}$ est une suite aléatoire croissante vérifiant

$$s_0^\epsilon = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^\epsilon = +\infty.$$

Construction de l'approximation forte pour le mouvement brownien

On définit le squelette $(s_n^\epsilon, x_n^\epsilon) = (\text{tps de sortie cumulé, valeur de sortie})$ d'une suite particulière de sphéroïdes particulière pour X .

- Les sphéroïdes sont définies par leurs frontières $\phi_\epsilon(t)$ t.q.:

$$\phi_\epsilon(0) = 0 = \phi_\epsilon(r_\epsilon) \text{ et } 0 < \phi_\epsilon(t) \leq \epsilon, \forall t \in]0, r_\epsilon[.$$

Initialisation $(s_0^\epsilon, x_0^\epsilon) = (0, x)$ correspondant à $X_0 = x$.

On définit la suite de temps successifs de sortie

$$s_{n+1}^\epsilon := \inf\{t \geq s_n^\epsilon : |X_t - X_{s_n^\epsilon}| \geq \phi_\epsilon(t - s_n^\epsilon)\}$$

and $x_n^\epsilon := X_{s_n^\epsilon}$

- Alors $(s_n^\epsilon)_{n \geq 0}$ est une suite aléatoire croissante vérifiant

$$s_0^\epsilon = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^\epsilon = +\infty.$$

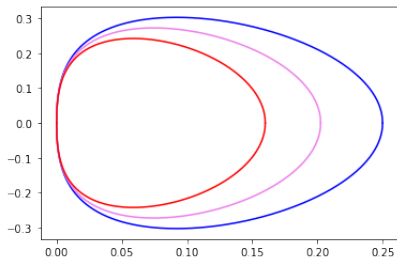
- L'approximation est définie par la fonction aléatoire constante par morceaux:

$$x_t^\epsilon = \sum_{n \geq 0} x_n^\epsilon 1_{\{s_n^\epsilon \leq t < s_{n+1}^\epsilon\}}$$

Choix des sphéroïdes

$$\phi_\epsilon(t) := \sqrt{t \ln\left(\frac{e\epsilon^2}{t}\right)}, \quad t \in [0, e\epsilon^2].$$

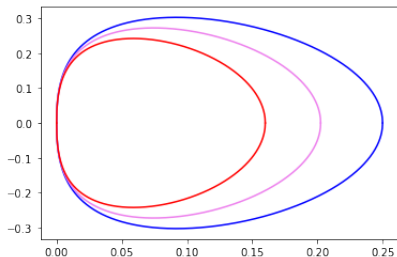
Densité du temps de sortie : $e\epsilon^2 W$
avec W de loi log-gamma(3/2, 2).



Choix des sphéroïdes

$$\phi_\epsilon(t) := \sqrt{t \ln\left(\frac{e\epsilon^2}{t}\right)}, \quad t \in [0, e\epsilon^2].$$

Densité du temps de sortie : $e\epsilon^2 W$
avec W de loi log-gamma(3/2, 2).

Squelette Brownien (BS)₁

- 1 Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d de variables de loi Gamma $\Gamma(3/2, 2)$.
- 2 Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher
 $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(Z_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes.

Définition du squelette Brownien: $\left((u_n^\epsilon, s_n^\epsilon)_{n \geq 1}, (x_n^\epsilon)_{n \geq 0} \right)$ où

$$\begin{cases} u_n^\epsilon = \epsilon^2 e^{1-A_n}, & s_n^\epsilon = u_1^\epsilon + \dots + u_n^\epsilon, \\ x_n^\epsilon = x_{n-1}^\epsilon + Z_n \phi_\epsilon(u_n^\epsilon), & n \geq 1 \text{ et } x_0^\epsilon = x. \end{cases}$$

Convergence de l'approximation ϵ -forte brownienne

- Le processus stochastique cst/morceaux $(x_t^\epsilon)_{t \geq 0}$ construit à partir du squelette brownien est une approximation ϵ -forte du mvt brownien.

Convergence de l'approximation ϵ -forte brownienne

- Le processus stochastique cst/morceaux $(x_t^\epsilon)_{t \geq 0}$ construit à partir du squelette brownien est une approximation ϵ -forte du mvt brownien.
- Le nombre de points utilisé sur l'intervalle $[0, T]$ noté N_T^ϵ et défini par:

$$N_T^\epsilon := \inf\{n \geq 1 : s_n^\epsilon \geq T\}$$

vérifie

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\mu^3}{\epsilon^2 \sigma^2 T}} \left(\epsilon^2 N_T^\epsilon - \frac{T}{e} 3^{3/2} \right) = G \quad \text{en loi}$$

avec $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\mu = e 3^{-3/2}$ et $\sigma^2 = (5^{-3/2} - 3^{-3}) e^2$.

Convergence de l'approximation ϵ -forte brownienne

- Le processus stochastique cst/morceaux $(x_t^\epsilon)_{t \geq 0}$ construit à partir du squelette brownien est une approximation ϵ -forte du mvt brownien.
- Le nombre de points utilisé sur l'intervalle $[0, T]$ noté N_T^ϵ et défini par:

$$N_T^\epsilon := \inf\{n \geq 1 : s_n^\epsilon \geq T\}$$

vérifie

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\mu^3}{\epsilon^2 \sigma^2 T}} \left(\epsilon^2 N_T^\epsilon - \frac{T}{e} 3^{3/2} \right) = G \quad \text{en loi}$$

avec $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\mu = e 3^{-3/2}$ et $\sigma^2 = (5^{-3/2} - 3^{-3}) e^2$.

- Csq: le coût de l'approximation forte est de l'ordre de T/ϵ^2 .

Résultat basé sur un processus de renouvellement.

Approximation ϵ -forte pour une famille particulière de diffusions

On considère la solution de l'EDS suivante:

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + \mu(t, X_t) dt, \quad X_0 = x_0.$$

Approximation ϵ -forte pour une famille particulière de diffusions

On considère la solution de l'EDS suivante:

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + \mu(t, X_t) dt, \quad X_0 = x_0.$$

On s'intéresse aux familles de diffusion suivantes (Wang - Pötzelberger):

- (classe L) $\sigma(t, x) = \bar{\sigma}(t)$ et $\mu(t, x) = a(t)x + b(t)$, $x \in \mathbb{R}$
- (classe G) $\sigma(t, x) = \bar{\sigma}x$ et $\mu(t, x) = a(t)x + b(t)x \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Approximation ϵ -forte pour une famille particulière de diffusions

On considère la solution de l'EDS suivante:

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + \mu(t, X_t) dt, \quad X_0 = x_0.$$

On s'intéresse aux familles de diffusion suivantes (Wang - Pötzelberger):

- (classe L) $\sigma(t, x) = \bar{\sigma}(t)$ et $\mu(t, x) = a(t)x + b(t)$, $x \in \mathbb{R}$
- (classe G) $\sigma(t, x) = \bar{\sigma}x$ et $\mu(t, x) = a(t)x + b(t)x \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Représentation de la solution: $X_t = f(t, x_0 + B_{\rho(t)}), \quad t \geq 0.$

Approximation ϵ -forte pour une famille particulière de diffusions

On considère la solution de l'EDS suivante:

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + \mu(t, X_t) dt, \quad X_0 = x_0.$$

On s'intéresse aux familles de diffusion suivantes (Wang - Pötzelberger):

- (classe L) $\sigma(t, x) = \bar{\sigma}(t)$ et $\mu(t, x) = a(t)x + b(t)$, $x \in \mathbb{R}$
- (classe G) $\sigma(t, x) = \bar{\sigma}x$ et $\mu(t, x) = a(t)x + b(t)x \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Représentation de la solution: $X_t = f(t, x_0 + B_{\rho(t)}), \quad t \geq 0.$

Pour les diffusions de classe L :

$$f(t, x) = \frac{\bar{\sigma}(t)}{\sqrt{\rho'(t)}} x + c(t),$$

$$c(t) = e^{\int_0^t a(s) ds} \int_0^t b(s) e^{-\int_0^s a(u) du} ds, \quad \rho(t) = \int_0^t \bar{\sigma}(s)^2 e^{-2 \int_0^s a(u) du} ds.$$

Idée :

Utiliser la fonction f qui permet de relier le mouvement brownien à la diffusion de classe L pour passer d'une approximation forte du mvt brownien à une approximation forte d'une diffusion.

Idée :

Utiliser la fonction f qui permet de relier le mouvement brownien à la diffusion de classe L pour passer d'une approximation forte du mvt brownien à une approximation forte d'une diffusion.

Hypothèse:

- Le processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie $X_t = f(t, x_0 + B_{\rho(t)})$ où ρ est strictement croissante (+hyp), $\rho(0) = 0$ et $f \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec

$$\sup_{t \in [0, T]} \max \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \right\} \leq F(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

- F est \mathcal{C}^2 et strictement croissante.

Idée :

Utiliser la fonction f qui permet de relier le mouvement brownien à la diffusion de classe L pour passer d'une approximation forte du mvt brownien à une approximation forte d'une diffusion.

Hypothèse:

- Le processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie $X_t = f(t, x_0 + B_{\rho(t)})$ où ρ est strictement croissante (+hyp), $\rho(0) = 0$ et $f \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec

$$\sup_{t \in [0, T]} \max \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \right\} \leq F(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

- F est \mathcal{C}^2 et strictement croissante.

A partir de F , on construit une certaine fonction η qui permet de gérer la taille des sphéroïdes browniennes: $\eta(x)F(2x^2 + 1)$ est constant.

Nécessité d'une modification du squelette brownien.

- 1 Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables de loi Gamma $\Gamma(3/2, 2)$.
- 2 Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher
 $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(Z_n)_{n \geq 1}$ sont indépendants.

Définition du squelette brownien **modifié** $(BS)_\eta$

$$\begin{cases} u_n^\epsilon = \epsilon^2 \eta^2(x_{n-1}^\epsilon) e^{1-A_n}, & s_n^\epsilon = u_1^\epsilon + \dots + u_n^\epsilon, \\ x_n^\epsilon = x_{n-1}^\epsilon + Z_n \eta(x_{n-1}^\epsilon) \phi_\epsilon\left(\frac{u_n^\epsilon}{\eta^2(x_{n-1}^\epsilon)}\right), & \text{et } x_0^\epsilon = x. \end{cases}$$

Nécessité d'une modification du squelette brownien.

- 1 Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables de loi Gamma $\Gamma(3/2, 2)$.
- 2 Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(Z_n)_{n \geq 1}$ sont indépendants.

Définition du squelette brownien **modifié** $(BS)_\eta$

$$\begin{cases} u_n^\epsilon = \epsilon^2 \eta^2(x_{n-1}^\epsilon) e^{1-A_n}, & s_n^\epsilon = u_1^\epsilon + \dots + u_n^\epsilon, \\ x_n^\epsilon = x_{n-1}^\epsilon + Z_n \eta(x_{n-1}^\epsilon) \phi_\epsilon\left(\frac{u_n^\epsilon}{\eta^2(x_{n-1}^\epsilon)}\right), & \text{et } x_0^\epsilon = x. \end{cases}$$

Théorème

Soit $(BS)_\eta$ un squelette brownien associé à la fonction η alors

$$y_t^\epsilon := \sum_{n \geq 0} f(\rho^{-1}(s_n^\epsilon), x_n^\epsilon) 1_{\{s_n^\epsilon \leq \rho(t) < s_{n+1}^\epsilon\}}$$

est une approximation ϵ -forte de la diffusion de classe L : (X_t) sur $[0, T]$.

Nombre de points nécessaires pour couvrir un intervalle de temps:

$$N_t^\epsilon := \inf\{n \geq 0 : s_n^\epsilon \geq t\} \quad \text{et} \quad \hat{N}_t^\epsilon := N_{\rho(t)}^\epsilon.$$

Nombre de points nécessaires pour couvrir un intervalle de temps:

$$N_t^\epsilon := \inf\{n \geq 0 : s_n^\epsilon \geq t\} \quad \text{et} \quad \hat{N}_t^\epsilon := N_{\rho(t)}^\epsilon.$$

Théorème

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ une diffusion de classe L ou G . Alors \hat{N}_T^ϵ , le nombre de points nécessaires pour construire l'approximation ϵ -forte sur l'intervalle $[0, T]$, vérifie

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \mathbb{E}[\hat{N}_T^\epsilon] &= C \mathbb{E} \left[\int_0^{\rho^{-1}(T)} \frac{1}{\eta^2(x + B_s)} ds \right] \\ &= \kappa \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}} F^2(2(x + y)^2 + 1) L_{\rho(T)}(dy) \right] \end{aligned}$$

où L_t désigne le temps local du mouvement brownien.

Étape 1. Eq. de renouvellement pour $u^\epsilon(t, x) = \epsilon^2 \mathbb{E}[N_t^\epsilon | x_0^\epsilon = x]$.

$$u^\epsilon(t, x) = \epsilon^2 M(t/(\epsilon^2 \eta^2(x))) + \sum_{i=\pm 1} \frac{1}{2} \int_0^{t/(\epsilon^2 \eta^2(x))} u^\epsilon\left(t - s\epsilon^2 \eta^2(x), x + i\epsilon \eta(x) \phi_\epsilon(s)\right) dM(s)$$

Ici M représente la fonction de répartition de e^{1-A} , $A \sim \Gamma(3/2, 2)$.

Étape 1. Eq. de renouvellement pour $u^\epsilon(t, x) = \epsilon^2 \mathbb{E}[N_t^\epsilon | x_0^\epsilon = x]$.

$$u^\epsilon(t, x) = \epsilon^2 M(t/(\epsilon^2 \eta^2(x))) + \sum_{i=\pm 1} \frac{1}{2} \int_0^{t/(\epsilon^2 \eta^2(x))} u^\epsilon\left(t - s\epsilon^2 \eta^2(x), x + i\epsilon \eta(x) \phi_\epsilon(s)\right) dM(s)$$

Ici M représente la fonction de répartition de e^{1-A} , $A \sim \Gamma(3/2, 2)$.

Étape 2. On considère la solution de l'EDP:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) + \kappa F^2(2x^2 + 1), \quad U(0, x) = 0$$

avec sa représentation probabiliste:

$$U(t, x) := \kappa \mathbb{E} \left[\int_0^t F^2(2(x + B_s)^2 + 1) ds \right],$$

Étape 1. Eq. de renouvellement pour $u^\epsilon(t, x) = \epsilon^2 \mathbb{E}[N_t^\epsilon | x_0^\epsilon = x]$.

$$u^\epsilon(t, x) = \epsilon^2 M(t/(\epsilon^2 \eta^2(x))) + \sum_{i=\pm 1} \frac{1}{2} \int_0^{t/(\epsilon^2 \eta^2(x))} u^\epsilon\left(t - s\epsilon^2 \eta^2(x), x + i\epsilon \eta(x) \phi_\epsilon(s)\right) dM(s)$$

Ici M représente la fonction de répartition de e^{1-A} , $A \sim \Gamma(3/2, 2)$.

Étape 2. On considère la solution de l'EDP:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) + \kappa F^2(2x^2 + 1), \quad U(0, x) = 0$$

avec sa représentation probabiliste:

$$U(t, x) := \kappa \mathbb{E} \left[\int_0^t F^2(2(x + B_s)^2 + 1) ds \right],$$

Étape 3. Comportement de la différence $D^\epsilon(t, x) := u^\epsilon(t, x) - U(t, x)$

Exemple:

Dérive $\frac{\cos(t)}{2 + \sin(t)}x + \cos(t)$ et coeff de diffusion $\bar{\sigma}(t) = 2 + \sin(t)$.

Alors on a $\rho(t) = 4t$,

$$f(t, x) = (2 + \sin(x)) \left(\frac{x}{2} + \ln \left(1 + \frac{\sin(t)}{2} \right) \right) \quad \text{et} \quad F(x) = 3 + \frac{\sqrt{|x|}}{2}.$$

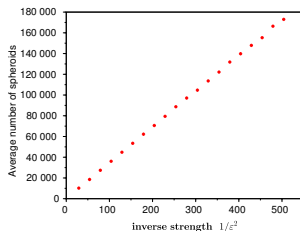
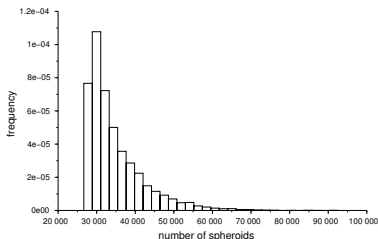


Figure: Histogram of the number of ϕ_ϵ -domains used to cover the time interval $[0, 1]$ for $\epsilon = 0.1$ (left, sample of size 10 000) – Average number of ϕ_ϵ -domains versus the inverse strength $1/\epsilon^2$ (right, sample of size for each point: 1 000).

Approximation ϵ -forte du processus de Bessel

Le processus de Bessel de dimension δ (d'indice $\nu = \frac{\delta}{2} - 1$) est solution de l'EDS uni-dimensionnelle:

$$Z_t^{\delta,y} = y + \frac{\delta - 1}{2} \int_0^t (Z_s^{\delta,y})^{-1} ds + B_t, \quad t \geq 0$$

Approximation ϵ -forte du processus de Bessel

Le processus de Bessel de dimension δ (d'indice $\nu = \frac{\delta}{2} - 1$) est solution de l'EDS uni-dimensionnelle:

$$Z_t^{\delta,y} = y + \frac{\delta - 1}{2} \int_0^t (Z_s^{\delta,y})^{-1} ds + B_t, \quad t \geq 0$$

- lorsque δ est entier, $Z^{\delta,y}$ a la même loi que la norme d'un mouvement brownien de dimension δ
- possible de construire un squelette de processus de Bessel de dimension entière
- utilisation de l'identité de Shiga-Watanabe pour construire une squelette en dimension δ quelconque
- qualité de l'approximation : description du nombre de points nécessaires: TCL.

Simulation numérique

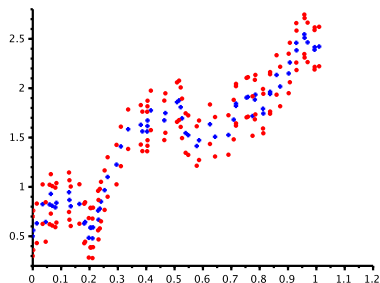
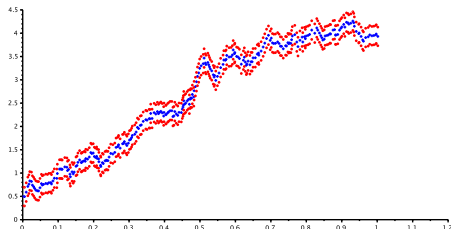


Figure: Processus de Bessel de dimension 10 (gauche) ou de dimension 2 (droite) représenté par son squelette (crosses) et les bornes presque sûres (intervalle de temps $[0, 1]$ et $y_0 = 0.5$, $\epsilon = 0.2$)

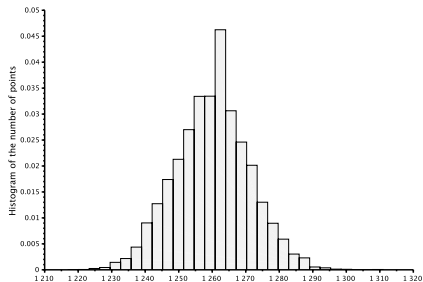
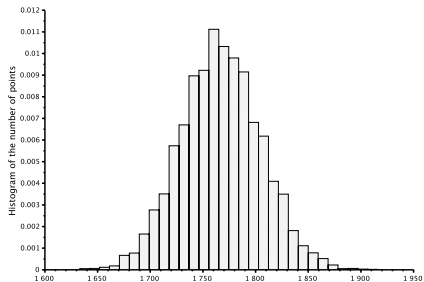


Figure: Histogramme du nombre de points N_T^ε pour un échantillon de processus de Bessel de dimension 2 (gauche) ou de dimension 20 (droite), observés sur l'intervalle $[0, 3]$ avec $y_0 = 0.5$, $\varepsilon = 0.05$, taille de l'échantillon 10 000.

Conclusion et questions ouvertes

- Développement d'une approximation forte basée sur des sorties de sphéroïdes pour le Brownien, le Bessel et quelques familles de diffusions unidimensionnelles.
- Comment traiter d'autres familles de diffusion en $d = 1$.
- S'inspirer de la marche sur les sphéroïdes pour améliorer les méthodes de discrétisation
- Passer à la dimension d quelconque.

Références:

- M. Deaconu and S. Herrmann. Strong approximation of Bessel processes, *Methodology and Computing in Applied Probability* (2023).
- M. Deaconu and S. Herrmann. Strong approximation of particular one-dimensional diffusions, preprint.
- M. Deaconu and S. Herrmann. Simulation of hitting times for Bessel processes with non integer dimension. *Bernoulli*, 23, nr. 4B: 3744–3771, 2017.
- M. Deaconu and S. Herrmann. Hitting time for Bessel processes—walk on moving spheres algorithm (WoMS). *Ann. Appl. Probab.*, 23(6):2259–2289, 2013.