Premier instant où le maximum du mouvement Brownien franchit une droite

P. Vallois
Institut Élie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine

Équipe projet BIGS, INRIA

avec Julien Randon-Furling (Université Panthéon Sorbonne) et Paavo Salminen (Abo Akademi University)

Journées de Probabilités Angers, 20 juin 2023

1. La version discrète

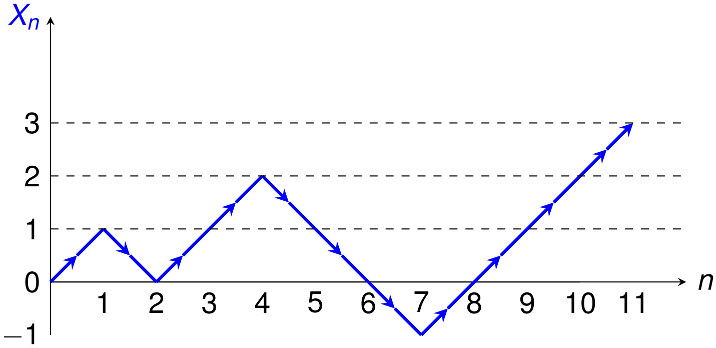
1.1 Introduction

- L'origine de la question provient d'un modèle jouet considéré par Paul Krapivsky, concernant la survie d'animaux.
- Plus précisément, l'animal se déplace sur une ligne. On prend pour origine sa position au temps 0. On suppose que ses positions successives sont données par une marche aléatoire symétrique au plus proche voisin, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et $X_0 = 0$:

$$X_n = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n, \quad n \geq 1,$$

où $\left(\epsilon_i\right)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que:

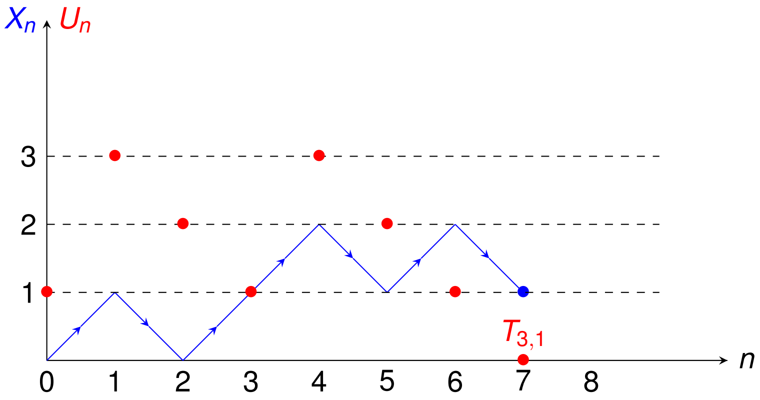
$$\mathbb{P}\big(\epsilon_i = +1\big) = \mathbb{P}\big(\epsilon_i = -1\big) = \frac{1}{2}.$$



- On suppose qu' initialement, sur chaque site situé sur la partie positive de l'axe, $a \geq 2$ unités de nourriture sont déposées.
- À l'origine, il y a une quantité b d'aliments.
- Il n'y a ni approvisionnement, ni retrait de nourriture sur les sites.
- L'animal doit consommer une unité d'aliment pour chaque déplacement.
- Quand il arrive sur un site encore pourvu, il stocke les a unités de nourriture, sans limite.
- S'il visite un site sans nourriture et que sa réserve est épuisée, l'animal meurt.

1.2 Construction du modèle discret

- À titre d'exemple, on prend $a = 3$ et $b = 1$.
- U_n désigne la quantité de nourriture à l'arrivée de l'animal sur le site X_n, au temps n.



- On introduit le maximum (unilatéral) :

$$S_n = \max_{0 \le i \le n} X_i, \quad n \ge 0.$$

- S_n est le nombre de sites positifs visités par la marche aléatoire jusqu'au temps n.
- Si l'animal ne se nourrissait pas, il aurait en réserve au temps n, une quantité $aS_n + b$ d'aliments.
- L'animal survit jusqu'au temps (aléatoire)

$$\boxed{T_{a,b} = \inf\{n \ge 0,\ n \ge aS_n + b\}.}$$

- Il est possible de déterminer la distribution conjointe du temps d'arrêt $T_{a,b}$ et $X_{T_{a,b}}$.

2. Du modèle discret au modèle continu

- Pour tout $N \geq 1$, on note $B^{(N)}$ le processus défini sur $[0, +\infty[$, qui est linéaire par morceaux et tel que

$$B^{(N)}\Big(\frac{k}{N}\Big) = \frac{1}{\sqrt{N}} X_k, \quad k \geq 0.$$

- Les processus $\big(B^{(N)}(t),\ t \geq 0\big)$ convergent en distribution, lorsque $N \to +\infty$, vers le mouvement Brownian standard $\big(B(t),\ t \geq 0\big)$.
- $\big(B(t),\ t \geq 0\big)$ est un processus continu, qui a des accroissements indépendants et stationnaires et est nul au temps $t = 0$.

Rappelons:

$$T_{a,b} = \inf\{k \geq 0,\ k \geq aS_k + b\}.$$

Proposition

Soit $\alpha > 0$, $a_N = \lfloor \alpha\sqrt{N} \rfloor$ *et* b_N *tel que* $\lim\limits_{N\to+\infty} b_N/N = 0$. *Alors*

$$\frac{T_{a_N,b_N}}{N} = \frac{\inf\{k \geq 0,\ k \geq a_N S_k + b_N\}}{N}$$

converge en distribution, $N \to +\infty$ *vers:*

$$T_\alpha = \inf\{t \geq 0,\ t \geq \alpha S(t)\}$$

où $S(t) = \max\limits_{0\leq u\leq t} B(u)$.

Idée de la preuve

$$\begin{aligned}\frac{T_{a_N,b_N}}{N} &= \frac{1}{N} \times \inf\{k \geq 0,\ k \geq a_N S_k + b_N\} \\ &= \inf\left\{\frac{k}{N} \geq 0,\ \frac{k}{N} \geq \frac{a_N}{\sqrt{N}} \frac{S_k}{\sqrt{N}} + \frac{b_N}{N}\right\} \\ &= \inf\left\{u \geq 0,\ u \geq \frac{a_N}{\sqrt{N}} S^{(N)}(u) + \frac{b_N}{N}\right\}.\end{aligned}$$

où $S^{(N)}(u) = \max_{0 \leq r \leq u} B^{(N)}(r)$.

Mais $\lim_{N \to +\infty} \frac{a_N}{\sqrt{N}} = \alpha$, $\lim_{N \to +\infty} \frac{b_N}{N} = 0$, et

$$\left(S^{(N)}(u),\ u \geq 0\right) \text{ converge vers } \left(S(u),\ u \geq 0\right)$$

(la convergence ayant lieu en tant que processus). "Alors" $\frac{T_{a_N,b_N}}{N}$ converge vers:

$$T_\alpha = \inf\{u \geq 0,\ u \geq \alpha S_u\}.$$

3. Le cadre Brownien

- Soit $\big(B(t),\ t \geq 0\big)$ un mouvement Brownien standard et

$$S(t) = \max_{0 \leq u \leq t} B(u).$$

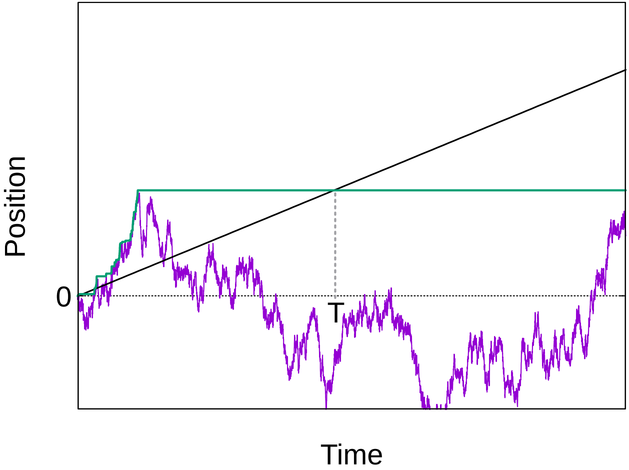
- On s'intéresse à:

$$T_m = \inf\big\{t \geq 0,\ t \geq m\, S(t)\big\} = \inf\big\{t \geq 0,\ t > m\, S(t)\big\}$$

  où $m > 0$.

- Le but est de déterminer la loi conjointe $\big(T_m, B(T_m)\big)$. Notons que par continuité:

$$S(T_m) = mT_m \quad \text{sur } \{T_m < +\infty\}.$$


Position
0
T
Time

3.1 Loi de T_m

Theorem

1. *Le temps d'arrêt T_m est p.s. fini et positif.*
2. *La loi de T_m admet la densité :*

$$\mathbb{P}(T_m \in dt)/dt = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\Big(e^{-t/2m^2} - \frac{1}{m}\int_{t/m}^{\infty} e^{-y^2/2t} dy\Big).$$

3. *La transformée de Laplace de T_m est :*

$$\mathbb{E}(e^{-\alpha T_m}) = \frac{1}{\alpha m^2}\big(\sqrt{1+2\alpha m^2} - 1\big),$$

$\alpha > -1/(2m^2)$.

4. *Par conséquent, T_m a tous ses moments finis et*

$$\mathbb{E}(T_m^k) = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{(k+1)!} m^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ingrédients de la preuve

- Le processus stochastique $t \mapsto S(t)$ est continu et croissant, soit $\big(H(x),\ x \geq 0\big)$ son inverse continu à droite:

$$H(x) = \inf\{t \geq 0,\ S(t) > x\}, \quad \forall\, x > 0.$$

- On peut facilement montrer:

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf\{t \geq 0,\ t > \ S(t)\} = \inf\{t \geq 0,\ t < \ H(t)\} \\ &= \inf\{t > 0,\ Y(t) < 0\}. \end{aligned}$$

  où $Y(t) = t - H(t)$.

- $\big(Y(t),\ t \geq 0\big)$ est un processus de Lévy spectralement négatif, d' après le livre de Kyprianou "Fluctuations of Lévy processes with Applications" (2014), on peut déterminer la transformée de Laplace de T_1, car pour ce type de processus de Lévy, tout est calculable.

3.2 La loi conjointe de T_m et $B(T_m)$

Theorem

1. *La densité du couple* $\left(T_m,\ B(T_m)\right)$ *est*

$$\psi_m(t,x) := \frac{\left(\frac{t}{m}-x\right)^+}{mt}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\exp\left\{-\frac{\left(\frac{2t}{m}-x\right)^2}{2t}\right\}, \quad t>0, x\in\mathbb{R}.$$

2. *De plus, lorsque* $-\frac{1}{2}\le m\alpha<4$, *alors:*

$$\mathbb{E}\left(e^{-\alpha B(T_m)}\right) = \frac{1}{1-m\alpha+\sqrt{1+2m\alpha}}.$$

3. *En particulier,*

$$S_{T_m}-B(T_m) = \frac{T_m}{m}-B(T_m)$$

est une variable aléatoire exponentielle, de moyenne $m/2$.

Les principales étapes de la preuve

- Rappelons quelques éléments de la théorie des excursions du mouvement Brownien en dessous de son maximum.
- Soit U l'ensemble des fonctions f définies sur $[0, +\infty[$ telles que $f(0) = 0$ et
  - pour tout $t \in]0, \zeta(f)[$, $f(t) > 0$,
  - pour tout $t \geq \zeta(f)$, $f(t) = 0$,

  où $0 < \zeta(f) < +\infty$.
- Soit $\alpha > 0$ tel que $H(\alpha) > H(\alpha-)$. On note:

$$\zeta(\xi_\alpha) = H(\alpha) - H(\alpha-)$$

et

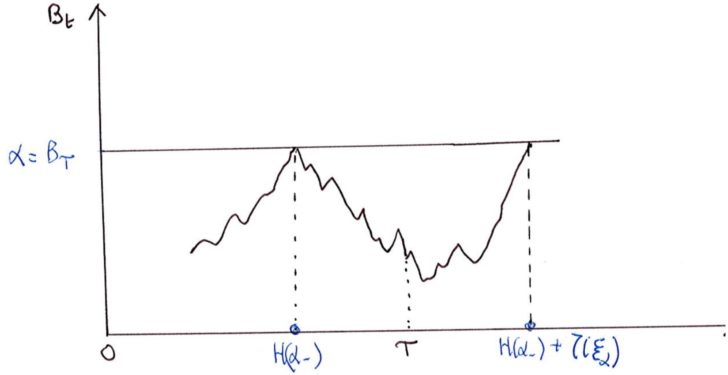
$$\xi_\alpha(u) = \begin{cases} \alpha - B\big(H(\alpha-) + u\big) & 0 \leq u \leq \zeta(\xi_\alpha) \\ 0 & u > \zeta(\xi_\alpha) \end{cases}$$

- Lorsque $H(\alpha) = H(\alpha-)$. On pose $\xi_\alpha = \delta$.

- D'après Rogers et Williams (2000) ainsi que Salminen et al (2007), le processus $(\xi_\alpha)_{\alpha>}$ est un processus ponctuel de Poisson à valeurs dans $U \cup \{\delta\}$ et de mesure caractéristique:

$$n\big(f \in U, f(u) \in dy, \zeta(f) > u\big) = \frac{2y}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-y^2/2u}\, dy.$$

- On prend $m = 1$ et on pose $T = T_1$.



$$\underline{H(\alpha-) < \alpha < H(\alpha-) + \tau(\xi_\alpha)}.$$

- On a:

$$S(T) = \inf\{\alpha > 0, \zeta(\xi_\alpha) + H(\alpha-) > \alpha\}$$

- De plus

$$B(T) = S(T) - \big(S(T) - B(T)\big) = \alpha - \xi_\alpha\big(\alpha - H(\alpha-)\big),$$

avec $S(T) = \alpha$.

- Soit ψ_1 la densité de (T_1, B_{T_1}).
- En s'inspirant d'un article de Rogers (1981), on peut montrer que $\psi = \psi_1$ vérifie l'équation intégrale :

(1) $$\psi = \phi_0 - \Lambda\psi$$

avec:

$$\phi_0(t,x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2t-x}{t^{3/2}}\,\exp\left\{-\frac{(2t-x)^2}{2t}\right\}$$

et

$$\Lambda\psi(t,x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t du\int_{-\infty}^u \psi(u,v)$$

$$\times\frac{2t-x-v}{(t-u)^{3/2}}\,\exp\left\{-\frac{(2t-x-v)^2}{2(t-u)}\right\}dv.$$

On montre:

- qu'il existe au plus une fonction densité vérifiant (1),
- la fonction

$$\psi_1^{(0)}(t,x) := \frac{(t-x)^+}{t}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\exp\Big\{-\frac{(2t-x)^2)}{2t}\Big\}, \quad t>0$$

vérifie (1) et est donc la densité de $\big(T_1, B(T_1)\big)$.

$\blacksquare$

3.3 Généralisation au cas du mouvement Brownien avec dérive.

- Soit $B^{(\mu)}$ le mouvement Brownien avec dérive $\mu \in \mathbb{R}$

$$B^{(\mu)}(t) = B(t) + \mu t, \quad t \geq 0.$$

- On considère:

$$T_m^{(\mu)} = \inf\{t \geq 0,\ t \geq m\, S^{(\mu)}(t)\}$$

où $m > 0$ et $S^{(\mu)}(t) = \max\limits_{0 \leq u \leq t} B^{(\mu)}(u)$.

- En utilisant le théorème de Girsanov, on peut calculer explicitement la densité de $\left(T_m^{(\mu)},\ B^{(\mu)}(T_m^{(\mu)})\right)$.
- Signalons une différence par rapport à l'étude brownienne:

$$\mathbb{P}(T_m^{(\mu)} < +\infty) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu m \leq 1, \\ \frac{1}{\mu m} & \text{if } \mu m > 1. \end{cases}$$