Théorèmes limites pour une marche aléatoire auto-répulsive

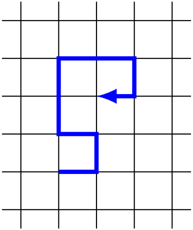
Laure Marêché

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg

Journées de Probabilités 2023
21 juin 2023

Introduction

Marche auto-évitante sur $\mathbb{Z}^d$ = marche aléatoire qui ne peut pas revenir sur sa trajectoire passée.



Problème : elle peut être bloquée.

$\Rightarrow$ Marches auto-répulsives = marches aléatoires qui ont faible probabilité de revenir sur leur trajectoire passée.

Non Markov $\Rightarrow$ intéressant et difficile.

Définition de la marche aléatoire auto-répulsive avec arêtes orientées sur $\mathbb{Z}$

Marche aléatoire auto-répulsive avec arêtes orientées sur $\mathbb{Z}$.
Modèle introduit par Tóth et Vető en 2008.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ avec $X_0 = 0$.

Définition de la marche aléatoire auto-répulsive avec arêtes orientées sur $\mathbb{Z}$

Marche aléatoire auto-répulsive avec arêtes orientées sur $\mathbb{Z}$.
Modèle introduit par Tóth et Vető en 2008.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ avec $X_0 = 0$.

Temps local : $\forall n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, on définit $\ell^{\pm}(n,i)$ le nombre de passages de $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de i à $i \pm 1$ avant le temps n, appelé *temps local sur l'arête orientée* $(i, i \pm 1)$ *au temps* n.

Définition de la marche aléatoire auto-répulsive avec arêtes orientées sur $\mathbb{Z}$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ avec $X_0 = 0$.

Temps local : $\forall n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, on définit $\ell^{\pm}(n,i)$ le nombre de passages de $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de i à $i \pm 1$ avant le temps n, appelé *temps local sur l'arête orientée* $(i, i\pm 1)$ *au temps* n.

Évolution de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Soit $w : \mathbb{Z} \mapsto]0,+\infty[$ croissante non constante.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = X_n + 1$ ou $X_n - 1$ et

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1) \text{ proportionnel à } w(\ell^-(n,X_n) - \ell^+(n,X_n))$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1) \text{ proportionnel à } w(\ell^+(n,X_n) - \ell^-(n,X_n))$$

$\Rightarrow$ Marche auto-répulsive.

$\forall n \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{Z}$, on définit $T_{n,i}^{\pm}$ le premier instant m où $\ell^{\pm}(m,i) = n$.

Limite d'échelle des temps locaux

$\forall n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, on définit $T^{\pm}_{n,i}$ le premier instant m où $\ell^{\pm}(m,i) = n$.

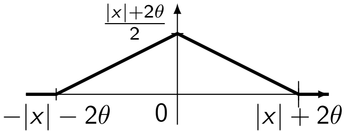
Convergence de $\left(\frac{1}{N}\ell^{+}\left(T^{\pm}_{\lfloor N\theta\rfloor,\lfloor Nx\rfloor}, \lfloor Ny\rfloor\right)\right)_{y\in\mathbb{R}}$ quand $N \to +\infty$.

Limite d'échelle des temps locaux

$\forall n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, on définit $T^{\pm}_{n,i}$ le premier instant m où $\ell^{\pm}(m,i) = n$.

Théorème (Tóth, Vető, 2008)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \theta > 0, \left\| \frac{1}{N} \ell^{+}\left(T^{\pm}_{\lfloor N\theta \rfloor, \lfloor Nx \rfloor}, \lfloor Ny \rfloor\right) - \left(\frac{|x|-|y|}{2} + \theta\right)_{+} \right\|_{\infty} \xrightarrow[N \to +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$



$: y \mapsto \left(\frac{|x|-|y|}{2} + \theta\right)_{+}$

Corollaire (Tóth, Vető, 2008)

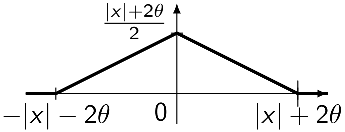
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, $\frac{1}{N^2} T^{\pm}_{\lfloor N\theta \rfloor, \lfloor Nx \rfloor} \xrightarrow[N \to +\infty]{\mathbb{P}} (|x| + 2\theta)^2$.

Limite d'échelle des temps locaux

$\forall n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, on définit $T^{\pm}_{n,i}$ le premier instant m où $\ell^{\pm}(m,i) = n$.

Théorème (Tóth, Vető, 2008)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \theta > 0, \left\| \frac{1}{N} \ell^{+}\left(T^{\pm}_{\lfloor N\theta \rfloor, \lfloor Nx \rfloor}, \lfloor Ny \rfloor\right) - \left(\frac{|x| - |y|}{2} + \theta\right)_{+} \right\|_{\infty} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$



$: y \mapsto \left(\frac{|x|-|y|}{2} + \theta\right)_{+}$

Corollaire (Tóth, Vető, 2008)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, $\frac{1}{N^2} T^{\pm}_{\lfloor N\theta \rfloor, \lfloor Nx \rfloor} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathbb{P}} (|x| + 2\theta)^2$.

Limite **déterministe**, contrairement à la marche aléatoire simple et aux marches aléatoires auto-répulsives avec arêtes non orientées.

Nouveaux résultats

- Fluctuations des temps locaux autour de leur limite déterministe.
- Limite d'échelle de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Fluctuation des temps locaux

On a vu $\left(\frac{1}{N}\ell^{+}\left(T^{\pm}_{\lfloor N\theta\rfloor,\lfloor Nx\rfloor},\lfloor Ny\rfloor\right)\right)_{y\in\mathbb{R}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\left(\frac{|x|-|y|}{2}+\theta\right)_{+}\right)_{y\in\mathbb{R}}$.

Fluctuations de $\left(\frac{1}{N}\ell^{+}\left(T^{\pm}_{\lfloor N\theta\rfloor,\lfloor Nx\rfloor},\lfloor Ny\rfloor\right)\right)_{y\in\mathbb{R}}$ autour de $\left(\left(\frac{|x|-|y|}{2}+\theta\right)_{+}\right)_{y\in\mathbb{R}}$?

Fluctuation des temps locaux

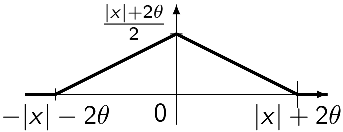
$\forall x \in \mathbb{R}$, on note $(B_y^x)_{y\in\mathbb{R}}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ avec $B_x^x = 0$ et de variance ρ (explicite dépendant de w).

Théorème (M., 2022)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\ell^+\left(T^{\pm}_{\lfloor N\theta\rfloor,\lfloor Nx\rfloor}, \lfloor Ny\rfloor\right) - N\left(\frac{|x|-|y|}{2}+\theta\right)_+\right)\right)_{y\in\mathbb{R}}$$

converge en loi vers $(B_y^x \mathbb{1}_{\{y\in[-|x|-2\theta,|x|+2\theta[\}})_{y\in\mathbb{R}}$ quand N tend vers $+\infty$, dans la topologie de Skorohod M_1, et ne converge **pas** en topologie de Skorohod classique (J_1).



Fluctuation des temps locaux

$\forall x \in \mathbb{R}$, on note $(B_y^x)_{y \in \mathbb{R}}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ avec $B_x^x = 0$ et de variance ρ (explicite dépendant de w).

Théorème (M., 2022)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \left(\ell^+ \left(T^{\pm}_{\lfloor N\theta \rfloor, \lfloor Nx \rfloor}, \lfloor Ny \rfloor \right) - N \left(\frac{|x| - |y|}{2} + \theta \right)_+ \right) \right)_{y \in \mathbb{R}}$$

converge en loi vers $(B_y^x \mathbb{1}_{\{y \in [-|x|-2\theta, |x|+2\theta[\}})_{y \in \mathbb{R}}$ quand N tend vers $+\infty$, dans la topologie de Skorohod M_1, et ne converge **pas** en topologie de Skorohod classique (J_1).

Corollaire (M., 2022)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$,

$$\frac{1}{N^{3/2}} \left(T^{\pm}_{\lfloor N\theta \rfloor, \lfloor Nx \rfloor} - N^2 (|x| + 2\theta)^2 \right) \xrightarrow[N \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{32}{3} \rho \left(\theta^3 + (|x| + 2\theta)^3 \right) \right).$$

Limite d'échelle de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Question : $\left(\frac{1}{N^\beta}X_{\lfloor Nt\rfloor}\right)_{t\geq 0}$ converge-t-il en loi pour un certain $\beta > 0$?

Limite d'échelle de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Question : $\left(\frac{1}{N^\beta}X_{\lfloor Nt\rfloor}\right)_{t\geq 0}$ converge-t-il en loi pour un certain $\beta > 0$?

Théorème (Mountford, Valle, Pimentel, 2014)

$\frac{X_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathcal{L}}$ loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Limite d'échelle de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Question : $\left(\frac{1}{N^\beta}X_{\lfloor Nt\rfloor}\right)_{t\geq 0}$ converge-t-il en loi pour un certain $\beta > 0$?

Théorème (Mountford, Valle, Pimentel, 2014)

$\frac{X_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathcal{L}}$ loi uniforme sur $[-1,1]$.

Proposition (M., Mountford, 2023)

$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}X_{\lfloor Nt\rfloor}\right)_{t\geq 0}$ ne converge pas en loi quand N tend vers $+\infty$ en topologie J_1.

$\Rightarrow$ Pas de limite d'échelle classique.

Limite d'échelle de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On prend $n := n(N)$ tel que $n \leq N^\alpha$ avec $\alpha < 1$ pour N assez grand et $n \to +\infty$ quand $N \to +\infty$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, on définit un processus $(Y_t^N)_{t\geq 0}$ par

$$Y_t^N = \frac{1}{n}\left(X_{\mathsf{T}^{\pm}_{\lfloor N\theta\rfloor,\lfloor Nx\rfloor}+tn^{3/2}} - X_{\mathsf{T}^{\pm}_{\lfloor N\theta\rfloor,\lfloor Nx\rfloor}}\right)$$

pour $tn^{3/2}$ entier et par interpolation sinon.

Théorème (M., Mountford, 2023)

$(Y_t^N)_{t\geq 0}$ converge en loi vers une limite non nulle quand N tend vers $+\infty$ en topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Perspectives

- Comprendre le processus limite ?
- Limites d'échelle de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour d'autres marches auto-répulsives ?

Merci pour votre attention.