Le théorème de Wschebor et ses descendants

Alain Rouault

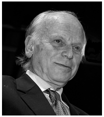
LMV, Paris-Saclay

20 Juin 2023

Journées de Probabilités - Angers

Plan

Plan



Mario Wschebor (1939-2011)

Soit $(W(t), t \geqslant 0, W(0) = 0)$ le brownien standard et λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. On pose

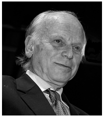
$$\mathcal{W}^\varepsilon(s) = \frac{W(s+\varepsilon) - W(s)}{\sqrt{\varepsilon}}\ ,\ (s \geqslant 0)\,.$$

Théorème (W 1992)

Presque sûrement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda\{s \in [0, 1] : \mathcal{W}^\varepsilon(s) \leqslant x\} = \Phi(x)\,, \tag{1}$$

où Φ *est la f.r. de* $\mathcal{N}(0; 1)$ *.*



Mario Wschebor (1939-2011)

Soit $(W(t), t \geqslant 0, W(0) = 0)$ le brownien standard et λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. On pose

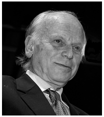
$$\mathcal{W}^{\varepsilon}(s) = \frac{W(s+\varepsilon) - W(s)}{\sqrt{\varepsilon}}\ ,\ (s \geqslant 0)\,.$$

Théorème (W 1992)

Presque sûrement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda\{s \in [0,1] : \mathcal{W}^{\varepsilon}(s) \leqslant x\} = \Phi(x)\,, \tag{1}$$

où Φ *est la f.r. de* $\mathcal{N}(0;1)$ *.*



Mario Wschebor (1939-2011)

Soit $(W(t), t \geqslant 0, W(0) = 0)$ le brownien standard et λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. On pose

$$\mathcal{W}^\varepsilon(s) = \frac{W(s+\varepsilon) - W(s)}{\sqrt{\varepsilon}} \ , \ (s \geqslant 0) \, .$$

Théorème (W 1992)

Presque sûrement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda\{s \in [0,1] : \mathcal{W}^\varepsilon(s) \leqslant x\} = \Phi(x) \, , \tag{1}$$

où Φ *est la f.r. de* $\mathcal{N}(0;1)$ *.*

Si on définit la mesure (aléatoire) d'occupation :

$$\mu_\varepsilon = \int_0^1 \delta_{\mathcal{W}^\varepsilon(s)} ds \, , \ \int f d\mu_\varepsilon = \int_0^1 f(\mathcal{W}^\varepsilon(s)) ds \, ,$$

alors, ce théorème dit que p.s. quand $\varepsilon \to 0$,

$$\mu_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{N}(0;1) \, .$$

Après changement de variable $s = \varepsilon t$ on peut écrire

$$\mu_\varepsilon = \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \delta_{\mathcal{W}^\varepsilon(\varepsilon t)} dt$$

et par auto-similarité :

$$\mu_\varepsilon \overset{(d)}{=} \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \delta_{\mathcal{W}^1(t)} dt$$

avec

$$\mathcal{W}^1(t) = W(t+1) - W(t) \, , \ t \in [0, \infty)$$

(processus de Slepian).

Si on définit la mesure (aléatoire) d'occupation :

$$\mu_\varepsilon = \int_0^1 \delta_{\mathcal{W}^\varepsilon(s)} ds \ , \ \int f d\mu_\varepsilon = \int_0^1 f(\mathcal{W}^\varepsilon(s)) ds \ ,$$

alors, ce théorème dit que p.s. quand $\varepsilon \to 0$,

$$\mu_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{N}(0;1) \ .$$

Après changement de variable $s = \varepsilon t$ on peut écrire

$$\mu_\varepsilon = \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \delta_{\mathcal{W}^\varepsilon(\varepsilon t)} dt$$

et par auto-similarité :

$$\mu_\varepsilon \stackrel{(d)}{=} \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \delta_{\mathcal{W}^1(t)} dt$$

avec

$$\mathcal{W}^1(t) = W(t+1) - W(t) \ , \ t \in [0, \infty)$$

(processus de Slepian).

Si on définit la mesure (aléatoire) d'occupation :

$$\mu_\varepsilon = \int_0^1 \delta_{\mathcal{W}^\varepsilon(s)} ds \ , \ \int f d\mu_\varepsilon = \int_0^1 f(\mathcal{W}^\varepsilon(s)) ds \ ,$$

alors, ce théorème dit que p.s. quand $\varepsilon \to 0$,

$$\mu_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{N}(0; 1) \ .$$

Après changement de variable $s = \varepsilon t$ on peut écrire

$$\mu_\varepsilon = \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \delta_{\mathcal{W}^\varepsilon(\varepsilon t)} dt$$

et par auto-similarité :

$$\mu_\varepsilon \stackrel{(d)}{=} \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \delta_{\mathcal{W}^1(t)} dt$$

avec

$$\mathcal{W}^1(t) = W(t+1) - W(t) \ , \ t \in [0, \infty)$$

(processus de Slepian).

Ce processus $\mathcal{W}^1$ est stationnaire, ergodique (en fait il est 1-dépendant).
Le théorème de Birkhoff's permet de conclure, au moins en probabilité.

Généralisations ?
Conditions néssaires :

- Accroissements stationnaires
- Auto-similarité .

.

Ce processus $\mathcal{W}^1$ est stationnaire, ergodique (en fait il est 1-dépendant).
Le théorème de Birkhoff's permet de conclure, au moins en probabilité.

Généralisations ?
Conditions néssaires :

- Accroissements stationnaires
- Auto-similarité .

.

Plan

Extension 1 : Régularisation.

Soit W un brownien indexé par $\mathbb{R}$, $\varphi \in BV(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{W}_\varphi^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/2} \int W(t - \varepsilon u) d\varphi(u) = \varepsilon^{-1/2} \int \varphi\left(\frac{t-u}{\varepsilon}\right) dW(u)$$

Si φ a un support compact et $\|\varphi\|_2 = 1$, la conclusion précédente reste vraie.

Extension 2 : Processus de Lévy stable.

Soit $\alpha \in (0, 2]$ et soit $(X(t), t \geqslant 0; X(0) = 0)$ le Lévy stable symétrique d'indice α. On pose

$$\mathcal{X}_\varphi^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/\alpha} \int X(t - \varepsilon u) d\varphi(u)$$

Si φ a un support compact et si μ_ε est la mesure d'occupation, on a

$$\text{p.s.} \ \ \mu_\varepsilon \Rightarrow \|\varphi\|_\alpha X(1) \, ,$$

(Azais + W 1996).

Extension 1 : Régularisation.

Soit W un brownien indexé par $\mathbb{R}$, $\varphi \in BV(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{W}_\varphi^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/2} \int W(t - \varepsilon u) d\varphi(u) = \varepsilon^{-1/2} \int \varphi\left(\frac{t-u}{\varepsilon}\right) dW(u)$$

Si φ a un support compact et $\|\varphi\|_2 = 1$, la conclusion précédente reste vraie.

Extension 2 : Processus de Lévy stable.

Soit $\alpha \in (0, 2]$ et soit $(X(t), t \geqslant 0; X(0) = 0)$ le Lévy stable symétrique d'indice α. On pose

$$\mathcal{X}_\varphi^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/\alpha} \int X(t - \varepsilon u) d\varphi(u)$$

Si φ a un support compact et si μ_ε est la mesure d'occupation, on a

$$\text{p.s.} \;\; \mu_\varepsilon \Rightarrow \|\varphi\|_\alpha X(1)\,,$$

(Azais + W 1996).

Extension 1 : Régularisation.
Soit W un brownien indexé par $\mathbb{R}$, $\varphi \in BV(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{W}_\varphi^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/2} \int W(t - \varepsilon u) d\varphi(u) = \varepsilon^{-1/2} \int \varphi\left(\frac{t-u}{\varepsilon}\right) dW(u)$$

Si φ a un support compact et $\|\varphi\|_2 = 1$, la conclusion précédente reste vraie.

Extension 2 : Processus de Lévy stable.
Soit $\alpha \in (0, 2]$ et soit $(X(t), t \geqslant 0; X(0) = 0)$ le Lévy stable symétrique d'indice α. On pose

$$\mathcal{X}_\varphi^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/\alpha} \int X(t - \varepsilon u) d\varphi(u)$$

Si φ a un support compact et si μ_ε est la mesure d'occupation, on a

$$\text{p.s.} \;\; \mu_\varepsilon \Rightarrow \|\varphi\|_\alpha X(1)\,,$$

(Azais + W 1996).

Extension 1 : Régularisation.
Soit W un brownien indexé par $\mathbb{R}$, $\varphi \in BV(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{W}_\varphi^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/2} \int W(t-\varepsilon u) d\varphi(u) = \varepsilon^{-1/2} \int \varphi\left(\frac{t-u}{\varepsilon}\right) dW(u)$$

Si φ a un support compact et $\|\varphi\|_2 = 1$, la conclusion précédente reste vraie.

Extension 2 : Processus de Lévy stable.
Soit $\alpha \in (0,2]$ et soit $(X(t), t \geqslant 0; X(0) = 0)$ le Lévy stable symétrique d'indice α. On pose

$$\mathcal{X}_\varphi^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/\alpha} \int X(t-\varepsilon u) d\varphi(u)$$

Si φ a un support compact et si μ_ε est la mesure d'occupation, on a

$$\text{p.s.} \ \ \mu_\varepsilon \Rightarrow \|\varphi\|_\alpha X(1) \,,$$

(Azais + W 1996).

Extension 1 : Régularisation.
Soit W un brownien indexé par $\mathbb{R}$, $\varphi \in BV(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{W}_\varphi^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/2} \int W(t - \varepsilon u) d\varphi(u) = \varepsilon^{-1/2} \int \varphi \left(\frac{t-u}{\varepsilon} \right) dW(u)$$

Si φ a un support compact et $\|\varphi\|_2 = 1$, la conclusion précédente reste vraie.

Extension 2 : Processus de Lévy stable.
Soit $\alpha \in (0, 2]$ et soit $(X(t), t \geqslant 0; X(0) = 0)$ le Lévy stable symétrique d'indice α. On pose

$$\mathcal{X}_\varphi^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/\alpha} \int X(t - \varepsilon u) d\varphi(u)$$

Si φ a un support compact et si μ_ε est la mesure d'occupation, on a

$$p.s. \ \ \mu_\varepsilon \Rightarrow \|\varphi\|_\alpha X(1) \,,$$

(Azais + W 1996).

Extension 3 : Brownien fractionnaire d'indice $H \in (0,1)$

$$\mathbb{E}B_H(t)B_H(s) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\right) .$$

Ce processus est autosimilaire, gaussien et a des accroissements stationnaires.

$$p.s. \quad \mu_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{N}(0; \sigma^2_\varphi)\,,$$

où

$$\sigma^2_\varphi = -\frac{1}{2}\iint |u-v|^{2H} d\varphi(u) d\varphi(v)\,,$$

(Azais+W 1996)

Nouvelle extension : Processus de Hermite (AR, en cours)

Extension 3 : Brownien fractionnaire d'indice $H \in (0, 1)$

$$\mathbb{E}B_H(t)B_H(s) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}\right) .$$

Ce processus est autosimilaire, gaussien et a des accroissements stationnaires.

$$\text{p.s.} \quad \mu_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{N}(0; \sigma_\varphi^2) ,$$

où

$$\sigma_\varphi^2 = -\frac{1}{2}\iint |u - v|^{2H} d\varphi(u) d\varphi(v) ,$$

(Azais+W 1996)

Nouvelle extension : Processus de Hermite (AR, en cours)

Extension 3 : Brownien fractionnaire d'indice $H \in (0, 1)$

$$\mathbb{E}B_H(t)B_H(s) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\right) .$$

Ce processus est autosimilaire, gaussien et a des accroissements stationnaires.

$$p.s. \quad \mu_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{N}(0; \sigma^2_\varphi) ,$$

où

$$\sigma^2_\varphi = -\frac{1}{2}\iint |u-v|^{2H} d\varphi(u) d\varphi(v) ,$$

(Azais+W 1996)

Nouvelle extension : Processus de Hermite (AR, en cours)

Extension 3 : Brownien fractionnaire d'indice $H \in (0,1)$

$$\mathbb{E}B_H(t)B_H(s) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\right) .$$

Ce processus est autosimilaire, gaussien et a des accroissements stationnaires.

$$p.s. \quad \mu_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{N}(0; \sigma^2_\varphi) ,$$

où

$$\sigma^2_\varphi = -\frac{1}{2}\iint |u-v|^{2H} d\varphi(u) d\varphi(v) ,$$

(Azais+W 1996)

Nouvelle extension : Processus de Hermite (AR, en cours)

Plan

Considérons le Mouvement Brownien Hermitien ou processus de Dyson $M^{(N)}(t), t \geqslant 0$. Fixons N. On a la correspondance

$$\mathcal{N}(0;1) \hookrightarrow \mathrm{GUE}(N)$$

$$W(t), t \geqslant 0 \hookrightarrow M^{(N)}(t), t \geqslant 0$$

$$\mathcal{W}^{\varepsilon}(t) = \frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\sqrt{\varepsilon}} \hookrightarrow \mathbb{W}^{\varepsilon,N}(t) = \frac{M^{(N)}(t+\varepsilon) - M^{(N)}(t)}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Proposition (en cours)

$$\lim_{\varepsilon} \int_0^1 \delta_{\mathbb{W}^{\varepsilon,N}(t)} \, dt = \mathrm{GUE}(N) \quad \textit{(p.s)}$$

Autrement dit : pour tout polynôme P, on a p.s.

$$\lim_{\varepsilon} \int_0^1 P\left(\mathbb{W}^{\varepsilon,N}(t)\right) dt = \mathbb{E}P(M_N) \tag{2}$$

où $M_N \sim \mathrm{GUE}(N)$.

Considérons le Mouvement Brownien Hermitien ou processus de Dyson $M^{(N)}(t), t \geqslant 0$. Fixons N. On a la correspondance

$$\mathcal{N}(0;1) \hookrightarrow \mathrm{GUE}(N)$$

$$W(t), t \geqslant 0 \hookrightarrow M^{(N)}(t), t \geqslant 0$$

$$\mathcal{W}^{\varepsilon}(t) = \frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\sqrt{\varepsilon}} \hookrightarrow \mathbb{W}^{\varepsilon,N}(t) = \frac{M^{(N)}(t+\varepsilon) - M^{(N)}(t)}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Proposition (en cours)

$$\lim_{\varepsilon} \int_0^1 \delta_{\mathbb{W}^{\varepsilon,N}(t)} dt = \mathrm{GUE}(N) \quad \textit{(p.s)}$$

Autrement dit : pour tout polynôme P, on a p.s.

$$\lim_{\varepsilon} \int_0^1 P\left(\mathbb{W}^{\varepsilon,N}(t)\right) dt = \mathbb{E}P(M_N) \tag{2}$$

où $M_N \sim \mathrm{GUE}(N)$.

On sait (Wigner '50) que si $M_N \sim \mathrm{GUE}(N)$, alors p.s. et en espérance

$$\lim_N \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, P(M_N) = \int P(x) d\, SC_1(x) \left(\Leftrightarrow \mu_N = \frac{1}{N} \sum_1^N \delta_{\lambda_i^{(N)}} \Rightarrow SC_1 \right)$$

où la loi semicirculaire SC_{σ^2} de variance σ^2 est donnée par :

$$SC_{\sigma^2}(dx) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{(4\sigma^2 - x^2)_+}\ dx$$

On sait (Wigner '50) que si $M_N \sim \mathrm{GUE}(N)$, alors p.s. et en espérance

$$\lim_N \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, P(M_N) = \int P(x) d\, \mathrm{SC}_1(x) \left(\Leftrightarrow \mu_N = \frac{1}{N} \sum_1^N \delta_{\lambda_i^{(N)}} \Rightarrow \mathrm{SC}_1 \right)$$

où la loi semicirculaire SC_{σ^2} de variance σ^2 est donnée par :

$$\mathrm{SC}_{\sigma^2}(dx) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{(4\sigma^2 - x^2)_+}\ dx$$

Une première question

$$
\begin{tikzcd}
\int_0^1 P\left(\mathbb{W}^{\varepsilon,N}(s)\right) ds \arrow[r, "\varepsilon\to 0"] \arrow[d, "N\to\infty??"] & \mathbb{E}\left(P(M^{(N)})\right) \arrow[d, "\lim_N \frac{1}{N}\mathrm{Tr}"] \\
??? \arrow[r, "\varepsilon\to 0"] & \int_0^1 P(x)\, d\,\mathrm{SC}_1(x)
\end{tikzcd}
$$

Plan

La “convergence” du processus de Dyson quand la dimension $N \to \infty$ est régie par le théorème of Voiculescu en probabilités non-commutatives.

Un espace de probabilité non-commutative est une algèbre d’opérateurs sur un espace de Hilbert séparable complexe, fermée pour l’adjonction et pour la convergence faible) munie d’une trace τ.

Les éléments auto-adjoints de $\mathcal{A}$ sont appelés

v. a. non-commutatives.

Si a est une telle variable, la forme linéaire sur les polynômes définie par

$$P \in \mathbb{C}[X] \mapsto \tau(P(a)),$$

est appelée la distribution de a, et il existe une unique μ telle que

$$\tau(P(a)) = \int_{\mathbb{R}} P(x) d\mu(x).$$

La “convergence” du processus de Dyson quand la dimension $N \to \infty$ est régie par le théorème of Voiculescu en probabilités non-commutatives.
Un espace de probabilité non-commutative est une algèbre d’opérateurs sur un espace de Hilbert séparable complexe, fermée pour l’adjonction et pour la convergence faible) munie d’une trace τ.
Les éléments auto-adjoints de $\mathcal{A}$ sont appelés

v. a. non-commutatives.

Si a est une telle variable, la forme linéaire sur les polynômes définie par

$$P \in \mathbb{C}[X] \mapsto \tau(P(a))\,,$$

est appelée la distribution de a, et il existe une unique μ telle que

$$\tau(P(a)) = \int_{\mathbb{R}} P(x)d\mu(x)\,.$$

La “convergence” du processus de Dyson quand la dimension $N \to \infty$ est régie par le théorème of Voiculescu en probabilités non-commutatives.
Un espace de probabilité non-commutative est une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert séparable complexe, fermée pour l'adjonction et pour la convergence faible) munie d'une trace τ.
Les éléments auto-adjoints de $\mathcal{A}$ sont appelés

v. a. non-commutatives.

Si a est une telle variable, la forme linéaire sur les polynômes définie par

$$P \in \mathbb{C}[X] \mapsto \tau(P(a)),$$

est appelée la distribution de a, et il existe une unique μ telle que

$$\tau(P(a)) = \int_{\mathbb{R}} P(x) d\mu(x).$$

On dit qu'une famille de sous-algèbres $(\mathcal{A}_i)$ contenant $\mathbf{1}$ est libre isi pour tout $a_1, \dots, a_n$ tels que pour tout k, $a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$ avec $i_k \neq i_{k+1}$ et $\tau(a_k) = 0$, alors $\tau(a_1 \dots a_n) = 0$.
C'est l'analogue de l'indépendance en probabilités classiques.
Le mouvement brownien libre est une famille $(\mathcal{S}(t), t \geqslant 0)$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

- $\tau(\mathbb{S}(t)) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$
- $\mathbb{S}$ a des accroissements libres
- $\mathbb{S}(0) = 0$ et la distribution of $\mathbb{S}(t) - \mathbb{S}(s)$ is SC_{t-s} for $s < t$.

Ce processus est autosimilaire d'indice $1/2$.

On dit qu'une famille de sous-algèbres $(\mathcal{A}_i)$ contenant $\mathbf{1}$ est libre isi pour tout $a_1, \dots, a_n$ tels que pour tout k, $a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$ avec $i_k \neq i_{k+1}$ et $\tau(a_k) = 0$, alors $\tau(a_1 \dots a_n) = 0$.
C'est l'analogue de l'indépendance en probabilités classiques.
Le mouvement brownien libre est une famille $(\mathcal{S}(t), t \geqslant 0)$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

- $\tau(\mathbf{S}(t)) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$
- $\mathbf{S}$ a des accroissements libres
- $\mathbf{S}(0) = 0$ et la distribution of $\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}(s)$ is SC_{t-s} for $s < t$.

Ce processus est autosimilaire d'indice $1/2$.

Un théorème dit que quand $N \to \infty$

$$\left(M^{(N)}(t), t \geqslant 0\right) \longrightarrow (\mathbf{S}(t), t \geqslant 0)$$

au sens suivant :

$$(\mu_N(t), t \geqslant 0) \Rightarrow (\mu_\infty(t), t \geqslant 0)$$

(en distribution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathcal{M}_1(\mathbb{R}))$), avec $\mu_\infty(t)$, la distribution of $\mathbf{S}(t)$.

Références : Biane, Cabanal-Duvillard+Guionnet, Rogers-Shi, ...

Plan

Proposition (Théorème de Wschebor libre, en cours)

Si $\mathbf{S}$ *est le brownien libre et si on note*

$$\mathcal{S}^{\varepsilon}(s) = \frac{\mathbf{S}(s+\varepsilon) - \mathbf{S}(s)}{\sqrt{\varepsilon}}\,,\ (s \geqslant 0)$$

alors, pour tout polynôme P

$$\lim_{\varepsilon} \int_0^1 P\left(S^{\varepsilon}(t)\, dt = \tau\left(P\left(\mathbf{S}(1)\right)\right) = \int P(x) d\, SC_1(x)\,,$$

au sens de la convergence des moments.

Une seconde question

$$
\begin{tikzcd}
\int_0^1 P\left(\mathbb{W}^{\varepsilon,N}(s)\right) ds \arrow[r, "\varepsilon\to 0"] \arrow[d, "\lim_N \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,[..]^k?"] & \mathbb{E}\left(P(M^{(N)})\right) \arrow[d, "\lim_N \frac{1}{N}\mathrm{Tr}"] \\
\int_0^1 P\left(\mathcal{S}^{\varepsilon}(s)\right) ds \arrow[r, "\varepsilon\to 0"] & \int_0^1 P(x)\, d\,\mathrm{SC}_1(x)
\end{tikzcd}
$$

Fluctuations

Proposition (en cours)

Pour tout polynôme P

$$\lim_{\varepsilon}\left(\varepsilon^{-1/2}\int_0^t \left(P\left(\mathcal{S}^{\varepsilon}(s)\right)-\tau\left(P\left(\mathbf{S}(1)\right)\right)\right)ds, t\in[0,1]\right)=\left(\sigma_P\mathbf{S}(t), t\in[0,1]\right)$$

où la limite est prise au sens de la convergence fidi des moments.

Extensions

1. Lévy libre stable
2. mBf libre
3. Hermite libre a.k.a. Tchebycheff libre

Fluctuations

Proposition (en cours)

Pour tout polynôme P

$$\lim_{\varepsilon}\left(\varepsilon^{-1/2}\int_0^t \left(P\left(\mathcal{S}^{\varepsilon}(s)\right)-\tau\left(P\left(\mathbf{S}(1)\right)\right)\right)ds, t\in[0,1]\right)=\left(\sigma_P\mathbf{S}(t), t\in[0,1]\right)$$

où la limite est prise au sens de la convergence fidi des moments.

Extensions

1. Lévy libre stable
2. mBf libre
3. Hermite libre a.k.a. Tchebycheff libre

MERCI POUR VOTRE ATTENTION!

LONGUE VIE AUX JOURNEES DE PROBABILITES!