# Processus de Hawkes discret avec inhibition

Anthony Muraro – Institut de Mathématiques de Toulouse
Avec Manon Costa (IMT) et Pascal Maillard (IMT)

Journée de probabilités – Angers – 20 Juin 2023

# Présentation du modèle

Motivation première : processus de Hawkes (processus ponctuel dont l'intensité conditionnelle est aléatoire et dépend de l'ensemble du passé du processus).

# Présentation du modèle

Motivation première : processus de Hawkes (processus ponctuel dont l'intensité conditionnelle est aléatoire et dépend de l'ensemble du passé du processus).

Version discrète : on considère une variable aléatoire $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$, qui va dépendre du passé (ici, mémoire de deux pas).
Processus auto-regressif de Poisson (INGARCH) :

$$\tilde{X}_n \sim \mathcal{P}\left(a\tilde{X}_{n-1} + b\tilde{X}_{n-2} + \lambda\right), \quad a, b \geq 0, \lambda > 0.$$

[Ferland et al. '06]

# Présentation du modèle

Motivation première : processus de Hawkes (processus ponctuel dont l'intensité conditionnelle est aléatoire et dépend de l'ensemble du passé du processus).

Version discrète : on considère une variable aléatoire $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$, qui va dépendre du passé (ici, mémoire de deux pas).
Processus auto-regressif de Poisson non-linéaire :

$$\tilde{X}_n \sim \mathcal{P}\left(\left(a\tilde{X}_{n-1} + b\tilde{X}_{n-2} + \lambda\right)_+\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

# Présentation du modèle

Motivation première : processus de Hawkes (processus ponctuel dont l'intensité conditionnelle est aléatoire et dépend de l'ensemble du passé du processus).

Version discrète : on considère une variable aléatoire $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$, qui va dépendre du passé (ici, mémoire de deux pas).
Processus auto-regressif de Poisson non-linéaire :

$$\tilde{X}_n \sim \mathcal{P}\left(\left(a\tilde{X}_{n-1} + b\tilde{X}_{n-2} + \lambda\right)_+\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

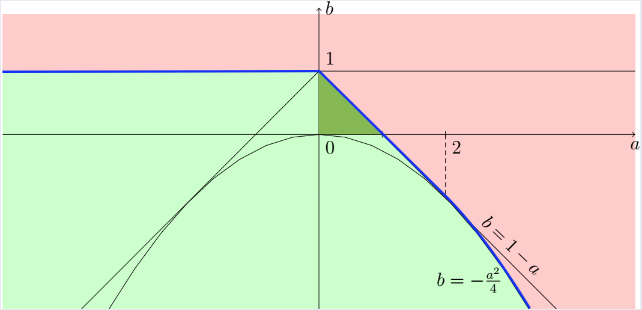
But : classifier le comportement asymptotique de $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$ en fonction de $a$ et $b$.

# Résultat principal

## Définition

*On définit les ensembles :*

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b < b_c(a)\}$$
$$\mathcal{T} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > b_c(a)\}.$$

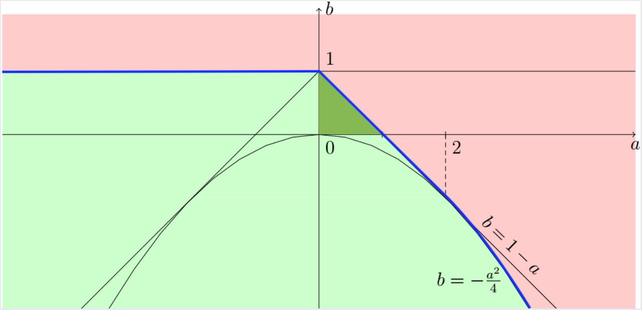


# Résultat principal

## Théorème (Costa, Maillard, M. '23)

- *Si* $(a, b) \in \mathcal{R}$, *alors la suite* $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$ *converge en loi lorsque* $n \to \infty$.
- *Si* $(a, b) \in \mathcal{T}$, *alors,*

$$\tilde{X}_n + \tilde{X}_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \text{ ps.}$$



# La chaîne de Markov associée

Rappel : $\tilde{X}_n \sim \mathcal{P}\Big((a\tilde{X}_{n-1} + b\tilde{X}_{n-2} + \lambda)_+\Big)$.
Ce résultat découle de l'étude de la chaîne de Markov naturellement associée à $(\tilde{X}_n)$, c'est-à-dire :

$$X_n := (\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-1}) \in \mathbb{N}^2, \ \ n \geq 0.$$

# La chaîne de Markov associée

Rappel : $\tilde{X}_n \sim \mathcal{P}\Big((a\tilde{X}_{n-1} + b\tilde{X}_{n-2} + \lambda)_+\Big)$.
Ce résultat découle de l'étude de la chaîne de Markov naturellement associée à $(\tilde{X}_n)$, c'est-à-dire :

$$X_n := (\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-1}) \in \mathbb{N}^2, \ \ n \geq 0.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}, \ \ \lambda > 0$ fixés.
Si $X_n = (i, j)$, alors $X_{n+1} = (k, i)$, où $k$ est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $(ai + bj + \lambda)_+ =: s_{ij}$.

Remarque : si $X_n = (i, j)$ et $s_{ij} = 0$, alors $X_{n+1} = (0, i)$.

# La chaîne de Markov associée

Rappel : $\tilde{X}_n \sim \mathcal{P}\Big((a\tilde{X}_{n-1} + b\tilde{X}_{n-2} + \lambda)_+\Big)$.
Ce résultat découle de l'étude de la chaîne de Markov naturellement associée à $(\tilde{X}_n)$, c'est-à-dire :

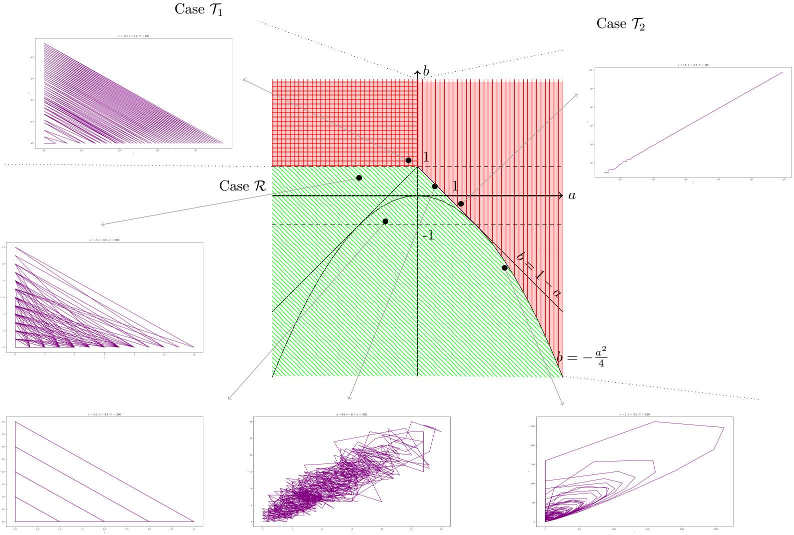
$$X_n := (\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-1}) \in \mathbb{N}^2, \ \ n \geq 0.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}, \ \ \lambda > 0$ fixés.
Si $X_n = (i, j)$, alors $X_{n+1} = (k, i)$, où $k$ est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $(ai + bj + \lambda)_+ =: s_{ij}$.

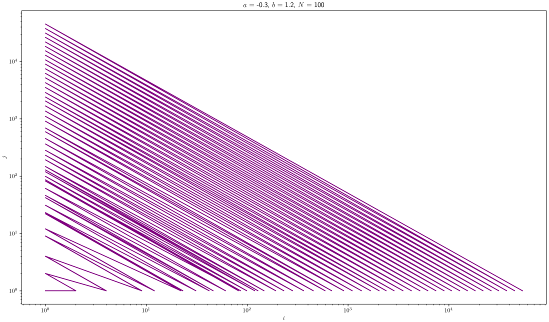
Remarque : si $X_n = (i, j)$ et $s_{ij} = 0$, alors $X_{n+1} = (0, i)$.

On cherche à classifier le comportement de cette chaîne de Markov (récurrente/transiente) en fonction des paramètres $a$ et $b$.

# Quelques trajectoires typiques



# Exemple d'un cas transient : $a < 0, b > 1$



# Exemple d'un cas transient : $a < 0, b > 1$

On suppose $a < 0$ et $b > 1$.
Heuristiquement, lorsque qu'on atteint un état du type $(i, 0)$, $i$ suffisamment grand :

$$s_{i0} = (ai + \lambda)_+ = 0.$$

Prochain pas de la chaîne de Markov : $(0, i)$.

# Exemple d'un cas transient : $a < 0, b > 1$

On suppose $a < 0$ et $b > 1$.
Heuristiquement, lorsque qu'on atteint un état du type $(i, 0)$, $i$ suffisamment grand :

$$s_{i0} = (ai + \lambda)_+ = 0.$$

Prochain pas de la chaîne de Markov : $(0, i)$.
Ici,

$$s_{0i} = (bi + \lambda)_+ = bi + \lambda > i.$$

Prochain pas de la chaîne de Markov : $(k, 0)$ où $k$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $s_{0i}$.

# Exemple d'un cas transient : $a < 0, b > 1$

On suppose $a < 0$ et $b > 1$.
Heuristiquement, lorsque qu'on atteint un état du type $(i, 0)$, $i$ suffisamment grand :

$$s_{i0} = (ai + \lambda)_+ = 0.$$

Prochain pas de la chaîne de Markov : $(0, i)$.
Ici,

$$s_{0i} = (bi + \lambda)_+ = bi + \lambda > i.$$

Prochain pas de la chaîne de Markov : $(k, 0)$ où $k$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $s_{0i}$.
Donc

$$(i, 0) \to (0, i) \to (k, 0), \quad k > i \quad \text{avec grande probabilité.}$$

# Exemple d'un cas transient : $a < 0, b > 1$

**Proposition**

*Soit $a < 0, b > 1$. Soit $1 < r < b$. Alors, pour $n_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}_{(0,0)}\left(X_{2n+1} \in \{(i,0), i \geq r^n\}, \forall n \geq n_0\right) > 0$$

# Stratégie générale pour les cas récurrents

Utilisation de critères de drift, fonctions de Lyapunov.

# Stratégie générale pour les cas récurrents

Utilisation de critères de drift, fonctions de Lyapunov.

Objectif : trouver un ensemble d'états $C$ *petite*, et trouver une fonction $V : \mathbb{N}^2 \to [1, +\infty)$ bien adaptée pour satisfaire le critère de drift $D(V, \varepsilon, K, C)$ :

$$\exists \varepsilon \in (0,1) : \exists K < \infty : \forall x \in \mathbb{N}^2,$$

$$\Delta V(x) := \mathbb{E}_x[V(X_1) - V(X_0)] \leq -\varepsilon V(x) + K 1_C$$

# Stratégie générale pour les cas récurrents

Utilisation de critères de drift, fonctions de Lyapunov.

Objectif : trouver un ensemble d'états $C$ *petite*, et trouver une fonction $V : \mathbb{N}^2 \to [1, +\infty)$ bien adaptée pour satisfaire le critère de drift $D(V, \varepsilon, K, C)$ :

$$\exists \varepsilon \in (0,1) : \exists K < \infty : \forall x \in \mathbb{N}^2,$$

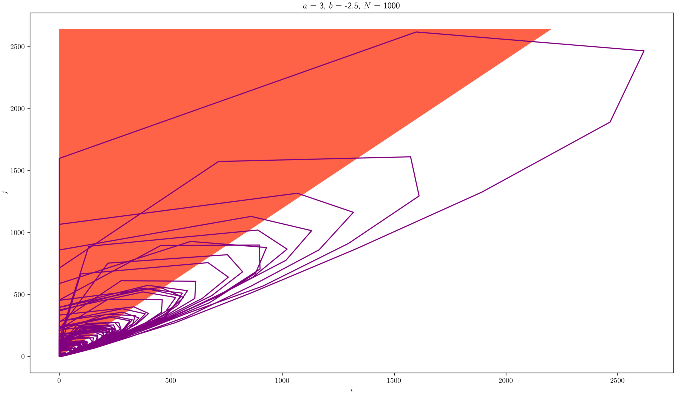
$$\Delta V(x) := \mathbb{E}_x[V(X_1) - V(X_0)] \leq -\varepsilon V(x) + K 1_C$$

Alors, il existe $\beta > 1$ et une mesure de probabilité $\pi$ sur $\mathbb{N}^2$, tels que,

$$\beta^n d_{VT}(\mathrm{Loi}(X_n), \pi) \to 0, \quad n \to \infty$$

et $\pi$ est la mesure de probabilité invariante pour la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$. [Douc *et al.* '18, Meyn, Tweedie '93]

# Exemple d'un cas récurrent : $a > 0$ et $b < -\frac{a^2}{4}$




Dans ce cas, l'ensemble $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ s_{ij} = 0\}$ est *petite*.

# Exemple d'un cas récurrent : $a > 0$ et $b < -\frac{a^2}{4}$

**Lemme**

*On pose, pour tout* $(i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad V(i,j) := \dfrac{i}{j+1} + 1.$

*Il existe un ensemble fini* $C \subset \mathbb{N}^2$ *et* $\varepsilon \in (0,1)$ *tels que la condition de drift* $D(V, \varepsilon, K, A \cup C)$ *soit satisfaite pour un* $K < \infty$*.*

## Exemple d'un cas récurrent : $a > 0$ et $b < -\frac{a^2}{4}$

**Lemme**

*On pose, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,* $\quad V(i,j) := \dfrac{i}{j+1} + 1.$

*Il existe un ensemble fini $C \subset \mathbb{N}^2$ et $\varepsilon \in (0,1)$ tels que la condition de drift $D(V, \varepsilon, K, A \cup C)$ soit satisfaite pour un $K < \infty$.*

En effet, pour $(i,j) \notin A$ et $\varepsilon \in (0,1)$ :

$$\Delta V(i,j) + \varepsilon V(i,j) = \frac{(\varepsilon - 1)i^2 + bj^2 + aij + L(i,j)}{(i+1)(j+1)}$$

# Exemple d'un cas récurrent : $a > 0$ et $b < -\frac{a^2}{4}$

**Lemme**

*On pose, pour tout* $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\quad V(i,j) := \frac{i}{j+1} + 1.$
*Il existe un ensemble fini* $C \subset \mathbb{N}^2$ *et* $\varepsilon \in (0,1)$ *tels que la condition de drift* $D(V, \varepsilon, K, A \cup C)$ *soit satisfaite pour un* $K < \infty$.

En effet, pour $(i,j) \notin A$ et $\varepsilon \in (0,1)$ :

$$\Delta V(i,j) + \varepsilon V(i,j) = \frac{(\varepsilon - 1)i^2 + bj^2 + aij + L(i,j)}{(i+1)(j+1)}$$

Au numérateur, une forme quadratique de discriminant $-(a^2 + 4b(1-\varepsilon)) > 0$, donc définie négative.

# Exemple d'un cas récurrent : $a > 0$ et $b < -\frac{a^2}{4}$

**Lemme**

*On pose, pour tout* $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\quad V(i,j) := \dfrac{i}{j+1} + 1.$

*Il existe un ensemble fini* $C \subset \mathbb{N}^2$ *et* $\varepsilon \in (0,1)$ *tels que la condition de drift* $D(V, \varepsilon, K, A \cup C)$ *soit satisfaite pour un* $K < \infty$.

En effet, pour $(i,j) \notin A$ et $\varepsilon \in (0,1)$ :

$$\Delta V(i,j) + \varepsilon V(i,j) = \frac{(\varepsilon - 1)i^2 + bj^2 + aij + L(i,j)}{(i+1)(j+1)}$$

Au numérateur, une forme quadratique de discriminant $-(a^2 + 4b(1-\varepsilon)) > 0$, donc définie négative.

On note $C = \{(i,j) \notin A, \Delta V(i,j) + \varepsilon V(i,j) \geq 0\}$.

# Perspectives

$$\tilde{X}_n \sim \mathcal{P}\Big((a_1\tilde{X}_{n-1} + a_2\tilde{X}_{n-2} + \cdots + a_p\tilde{X}_{n-p} + \lambda)_+\Big).$$

1. Classifier le processus avec trois paramètres ($p = 3$).
2. Généraliser la technique avec la fonction de Lyapounov pour montrer la récurrence de la chaîne de Markov pour $p$ paramètres.

Merci !

# Bibliographie


- Randal Douc, Eric Moulines, Pierre Priouret, and Philippe Soulier. Markov chains. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, Cham, 2018.
- René Ferland, Alain Latour, and Driss Oraichi. Integer-Valued GARCH Process. Journal of Time Series Analysis, 27(6) :923–942, November 2006. Publisher : Wiley-Blackwell.
- Alan G. Hawkes. Spectra of Some Self-Exciting and Mutually Exciting Point Processes. Biometrika, 58(1) :83–90, 1971. Publisher : [Oxford University Press, Biometrika Trust].
- Alan G. Hawkes and David Oakes. A Cluster Process Representation of a Self-Exciting Process. Journal of Applied Probability, 11(3) :493–503, 1974. Publisher : Applied Probability Trust.
- Matthias Kirchner. Hawkes and INAR ($\infty$) processes. Stochastic Processes and their Applications, 126(8) :2494–2525, 2016.