# Preuve probabiliste pour le Flocking du modèle de Cucker-Smale

Adrien Cotil

UMR MISTEA and UMR SELMET, INRAE, Institut Agro, 34060 Montpellier, France. Email adress : adrien.cotil@inrae.fr.

# Le modèle de Cucker-Smale

Modèle de Cucker-Smale (CS)

Modèle position/vitesse, individu centré, décrivant l'alignement d'individus.

F. Cucker and S. Smale, "Emergent behavior in flocks", 2007, *IEEE Transactions on automatic control*.

# Le modèle de Cucker-Smale

Modèle de Cucker-Smale (CS)

Modèle position/vitesse, individu centré, décrivant l'alignement d'individus.

Soit $x_i(t), v_i(t) \in \mathbb{R}^d$ position et vitesse de $i \in [\![1, n]\!]$ à l'instant $t \geq 0$.

F. Cucker and S. Smale, "Emergent behavior in flocks", 2007, *IEEE Transactions on automatic control*.

# Le modèle de Cucker-Smale

## Modèle de Cucker-Smale (CS)

Modèle position/vitesse, individu centré, décrivant l'alignement d'individus.

Soit $x_i(t), v_i(t) \in \mathbb{R}^d$ position et vitesse de $i \in [\![1, n]\!]$ à l'instant $t \geq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt}(t) = v_i(t), \\ \dfrac{dv_i}{dt}(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Q_t(i,j)\big(v_j(t) - v_i(t)\big), \end{cases}$$

F. Cucker and S. Smale, "Emergent behavior in flocks", 2007, *IEEE Transactions on automatic control*.

# Le modèle de Cucker-Smale

## Modèle de Cucker-Smale (CS)

Modèle position/vitesse, individu centré, décrivant l'alignement d'individus.

Soit $x_i(t), v_i(t) \in \mathbb{R}^d$ position et vitesse de $i \in [\![1, n]\!]$ à l'instant $t \geq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt}(t) = v_i(t), \\ \dfrac{dv_i}{dt}(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Q_t(i,j)\Big(v_j(t) - v_i(t)\Big), \end{cases}$$

où $Q_t(i,j) = A_{ij}\psi\Big(\|x_j(t) - x_i(t)\|_2\Big) \in \mathbb{R}_+$.

F. Cucker and S. Smale, "Emergent behavior in flocks", 2007, *IEEE Transactions on automatic control*.

# Le phénomène de Flocking

$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2, \; V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$

# Le phénomène de Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2, \; V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

## Définition

On dit qu'il y a flocking si :

$$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$$

# Le phénomène de Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2, \; V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

## Définition

On dit qu'il y a flocking si :

$$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$$

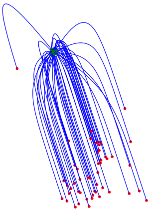


Figure: Simulation modèle CS cas flocking.

# Le phénomène de Flocking

$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2, \; V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$

## Définition

On dit qu'il y a flocking si :

$$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$$

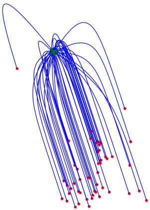


Figure: Simulation modèle CS cas flocking.

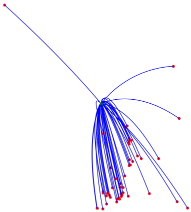


Figure: Simulation modèle CS cas non flocking.

# Le cas Hierarchical Leadership

## Hierarchical Leadership

$$i < j \implies A_{ij} = 0. \qquad (1)$$

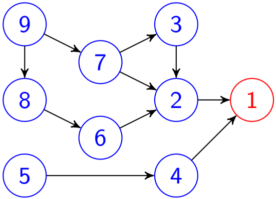
$\iff$ acyclique + unique classe récurrente.

# Le cas Hierarchical Leadership

## Hierarchical Leadership

$$i < j \implies A_{ij} = 0. \qquad (1)$$

$\iff$ acyclique + unique classe récurrente.

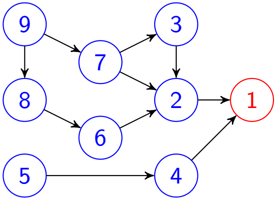


# Le cas Hierarchical Leadership

**Hierarchical Leadership**

$$i < j \implies A_{ij} = 0. \qquad (1)$$

$\iff$ acyclique + unique classe récurrente.



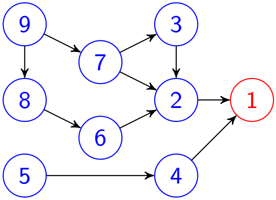

- L'unique classe récurrente ne contient que le noeud 1.

# Le cas Hierarchical Leadership

**Hierarchical Leadership**

$$i < j \implies A_{ij} = 0. \qquad (1)$$

$\iff$ acyclique + unique classe récurrente.



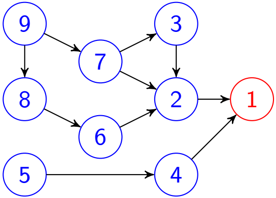

- L'unique classe récurrente ne contient que le noeud 1.
- $h_i$ la hauteur du noeud $i$ (nombre d'arc du chemin le plus long de $i$ à 1).

# Le cas Hierarchical Leadership

**Hierarchical Leadership**

$$i < j \implies A_{ij} = 0. \qquad (1)$$

$\iff$ acyclique + unique classe récurrente.



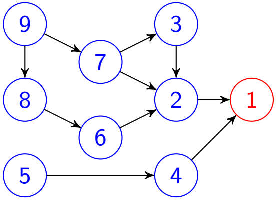

- L'unique classe récurrente ne contient que le noeud 1.
- $h_i$ la hauteur du noeud $i$ (nombre d'arc du chemin le plus long de $i$ à 1).
- $h = \sup_{i>1} h_i$ la hauteur du graphe.

# Le cas Hierarchical Leadership

**Hierarchical Leadership**

$$i < j \implies A_{ij} = 0. \qquad (1)$$

$\iff$ acyclique + unique classe récurrente.




- L'unique classe récurrente ne contient que le noeud 1.
- $h_i$ la hauteur du noeud $i$ (nombre d'arc du chemin le plus long de $i$ à 1).
- $h = \sup_{i>1} h_i$ la hauteur du graphe.

**Théorème (C. 2023)**

*Si $A$ satisfait (1) alors il y a flocking si*

$$V(0) < C \sup_{r \geq X(0)} (r - X(0))\psi(r),$$

*où $C > 0$ explicite, ne dépendant que de $A$.*

# Flot du modèle CS linéarisé

Modèle CS linéarisé

$$\frac{dv_i}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} Q_t^*(i,j)\Big(v_j(t) - v_i(t)\Big),$$

où

$$Q_t^*(i,j) = A_{ij}\psi\Big(\left\|x_j^*(t) - x_i^*(t)\right\|_2\Big).$$

# Flot du modèle CS linéarisé

Modèle CS linéarisé

$$\frac{dv_i}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} Q_t^*(i,j)\Big(v_j(t) - v_i(t)\Big),$$

où

$$Q_t^*(i,j) = A_{ij}\psi\Big(\Big\|x_j^*(t) - x_i^*(t)\Big\|_2\Big).$$

Flot du Modèle CS linéarisé

Soit $P_{s,t}^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$ le flot de CS, i.e

$$v_i(t) = (P_{s,t}^* v(s))_i = \sum_{j=1}^{n} P_{s,t}^*(i,j) v_j(s).$$

# Flot du modèle CS linéarisé

Modèle CS linéarisé

$$\frac{dv_i}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} Q_t^*(i,j)\Big(v_j(t) - v_i(t)\Big),$$

où

$$Q_t^*(i,j) = A_{ij}\psi\Big(\big\|x_j^*(t) - x_i^*(t)\big\|_2\Big).$$

Flot du Modèle CS linéarisé

Soit $P_{s,t}^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$ le flot de CS, i.e

$$v_i(t) = (P_{s,t}^* v(s))_i = \sum_{j=1}^{n} P_{s,t}^*(i,j) v_j(s).$$

Alors

$$\boxed{\frac{dP_{s,t}^*}{dt} = Q_t^* P_{s,t}^*}$$

et $P_{s,s}^* = I_d$.

# Flot du modèle CS linéarisé

Modèle CS linéarisé

$$\frac{dv_i}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} Q_t^*(i,j)\Big(v_j(t) - v_i(t)\Big),$$

où

$$Q_t^*(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x_j^*(t) - x_i^*(t)\right\|_2\right).$$

Flot du Modèle CS linéarisé

Soit $P_{s,t}^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$ le flot de CS, i.e

$$v_i(t) = (P_{s,t}^* v(s))_i = \sum_{j=1}^{n} P_{s,t}^*(i,j)v_j(s).$$

Alors

$$\boxed{\frac{dP_{s,t}^*}{dt} = Q_t^* P_{s,t}^*}$$

et $P_{s,s}^* = I_d$.

Semi-groupe : $P_{s,t}^* = P_{h,t}^* P_{s,h}^*$

# Équations de Kolmogorov

Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s),$

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \; P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right).$

# Équations de Kolmogorov

Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s),$

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \;\; P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right).$

Équations de Kolmogorov

$(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus de saut inhomogène.

# Équations de Kolmogorov

## Équations de Kolmogorov

$(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus de saut inhomogène.

$(Q_t)_{t\geq 0}$ son générateur.

## Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s)$,

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \; P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right)$.

# Équations de Kolmogorov

## Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s)$,

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \;\; P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right)$.

## Équations de Kolmogorov

$(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus de saut inhomogène.

$(Q_t)_{t\geq 0}$ son générateur.

$(P_{s,t})_{s\leq t}$ son semi-groupe,

# Équations de Kolmogorov

Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s),$

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \;\; P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right).$

## Équations de Kolmogorov

$(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus de saut inhomogène.

$(Q_t)_{t\geq 0}$ son générateur.

$(P_{s,t})_{s\leq t}$ son semi-groupe,i.e

$$P_{s,t}(i,j) = \mathbb{P}(Y_t = j \mid Y_s = i).$$

# Équations de Kolmogorov

Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s),$

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \;\; P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right).$

Équations de Kolmogorov

$(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus de saut inhomogène.

$(Q_t)_{t\geq 0}$ son générateur.

$(P_{s,t})_{s\leq t}$ son semi-groupe,i.e

$$P_{s,t}(i,j) = \mathbb{P}(Y_t = j \mid Y_s = i).$$

Alors :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{s,t}}{dt} = P_{s,t} Q_t, \\ \dfrac{dP_{s,t}}{ds} = -Q_s P_{s,t}. \end{cases}$$

Et $P_{s,s} = I_d$.

# Équations de Kolmogorov

Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s)$,

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \quad P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij} \psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right)$.

Équations de Kolmogorov

$(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus de saut inhomogène.

$(Q_t)_{t\geq 0}$ son générateur.

$(P_{s,t})_{s\leq t}$ son semi-groupe,i.e

$$P_{s,t}(i,j) = \mathbb{P}(Y_t = j \mid Y_s = i).$$

Alors :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{s,t}}{dt} = P_{s,t} Q_t, \\ \dfrac{dP_{s,t}}{ds} = -Q_s P_{s,t}. \end{cases}$$

Et $P_{s,s} = I_d$.

$$\boxed{P^*_{s,t}(i,j) = \mathbb{P}\left(Y^{(t)}_{t-s} = j \mid Y^{(t)}_0 = i\right).}$$

# Coefficient d'ergodicité de Dobrushin

Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s)$,

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \;\; P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right)$.

Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$
$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$

# Coefficient d'ergodicité de Dobrushin

Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s)$,

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \;\; P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right)$.

Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$
$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$

Coefficient d'ergodicité de Dobrushin (CED)

Soit $S(x) = \sup_{i \neq j} \|x_i - x_j\|_2$.

# Coefficient d'ergodicité de Dobrushin

Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s)$,

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \;\; P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right)$.

Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$
$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$

Coefficient d'ergodicité de Dobrushin (CED)

Soit $S(x) = \sup_{i \neq j} \|x_i - x_j\|_2$.

Flocking : $S\left(P^*_{0,t} v(0)\right) \to 0$.

# Coefficient d'ergodicité de Dobrushin

Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s)$,

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \;\; P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right)$.

Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$
$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$

Coefficient d'ergodicité de Dobrushin (CED)

Soit $S(x) = \sup_{i \neq j} \|x_i - x_j\|_2$.

Flocking : $S\left(P^*_{0,t} v(0)\right) \to 0$.

$$S\left(P^*_{0,t} v(0)\right) \leq \left[\sup_{S(v) \leq 1} S\left(P^*_{0,t} v\right)\right] S\left(v(0)\right)$$

# Coefficient d'ergodicité de Dobrushin

Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s),$

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \ \ P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right).$

Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$

$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$

Coefficient d'ergodicité de Dobrushin (CED)

Soit $S(x) = \sup_{i \neq j} \|x_i - x_j\|_2$.

Flocking : $S\left(P^*_{0,t} v(0)\right) \to 0.$

$$S\left(P^*_{0,t} v(0)\right) \leq \left[\sup_{S(v) \leq 1} S\left(P^*_{0,t} v\right)\right] S\left(v(0)\right)$$

Par dualité :

$$\sup_{S(v) \leq 1} S\left(P^*_{0,t} v\right)$$

$$= \sup_{\mu,\nu \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\mu P^*_{0,t}\right)_i - \left(\nu P^*_{0,t}\right)_i\right|$$

# Coefficient d'ergodicité de Dobrushin

Flot du Modèle CS linéarisé

$v(t) = P^*_{s,t} v(s)$,

$$\frac{dP^*_{s,t}}{dt} = Q^*_t P^*_{s,t}, \quad P^*_{s,s} = I_d,$$

$Q^*_t(i,j) = A_{ij}\psi\left(\left\|x^*_j(t) - x^*_i(t)\right\|_2\right)$.

Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$
$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$

Coefficient d'ergodicité de Dobrushin (CED)

Soit $S(x) = \sup_{i \neq j} \|x_i - x_j\|_2$.

Flocking : $S\left(P^*_{0,t} v(0)\right) \to 0$.

$$S\left(P^*_{0,t} v(0)\right) \leq \left[\sup_{S(v) \leq 1} S\left(P^*_{0,t} v\right)\right] S\left(v(0)\right)$$

Par dualité :

$$\sup_{S(v) \leq 1} S\left(P^*_{0,t} v\right)$$
$$= \sup_{\mu,\nu \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left|\left(\mu P^*_{0,t}\right)_i - \left(\nu P^*_{0,t}\right)_i\right|$$
$$=: 1 - \delta(P^*_{0,t}).$$

# Interprétation probabiliste du CED

Interprétation probabiliste

$v(t) = P^*_{s,t} v(s)$,

$P^*_{s,t}(i,j) = \mathbb{P}(Y^{(t)}_{t-s} = j \mid Y^{(t)}_0 = i)$.

Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$

$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$

# Interprétation probabiliste du CED

## Interprétation probabiliste

$$v(t) = P^*_{s,t} v(s),$$

$$P^*_{s,t}(i,j) = \mathbb{P}(Y^{(t)}_{t-s} = j \mid Y^{(t)}_0 = i).$$

## Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$
$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$$

## Interprétation probabiliste du CED

$$V(t) \leq (1 - \delta(P^*_{0,t}))V(0),$$

# Interprétation probabiliste du CED

## Interprétation probabiliste

$v(t) = P^*_{s,t} v(s)$,

$P^*_{s,t}(i,j) = \mathbb{P}(Y^{(t)}_{t-s} = j \mid Y^{(t)}_0 = i)$.

## Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$
$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$

## Interprétation probabiliste du CED

$$V(t) \leq (1 - \delta(P^*_{0,t}))V(0),$$

où

$$\delta(P^*_{0,t}) = \min_{i \neq j} \sum_{k=1}^{n} P^*_{0,t}(i,k) \wedge P^*_{0,t}(j,k)$$

# Interprétation probabiliste du CED

## Interprétation probabiliste

$v(t) = P^*_{s,t} v(s),$

$P^*_{s,t}(i,j) = \mathbb{P}(Y^{(t)}_{t-s} = j \mid Y^{(t)}_0 = i).$

## Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$
$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$

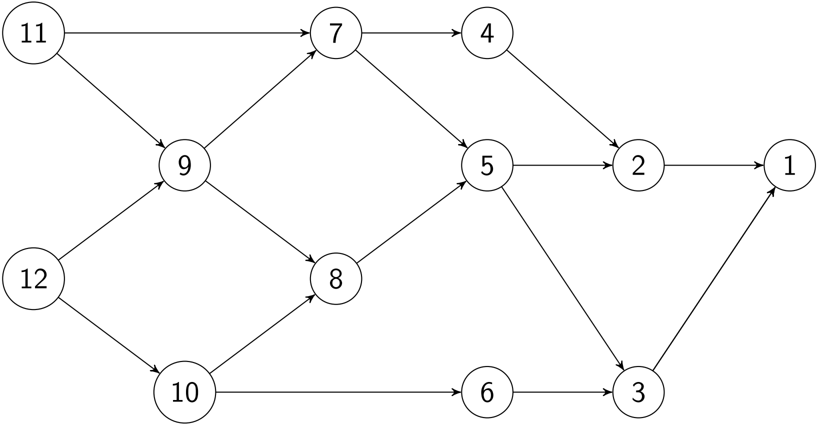
## Interprétation probabiliste du CED

$$V(t) \leq (1 - \delta(P^*_{0,t}))V(0),$$

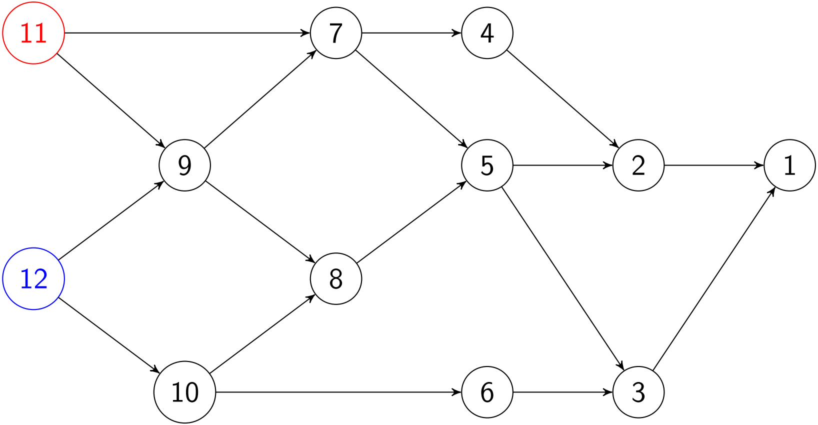
où

$$\begin{aligned} \delta(P^*_{0,t}) &= \min_{i \neq j} \sum_{k=1}^{n} P^*_{0,t}(i,k) \wedge P^*_{0,t}(j,k) \\ &\geq \min_{i \neq j} \mathbb{P}\left(Y^{[i]}_t = Y^{[j]}_t \mid Y^{[i]}_0 = i, Y^{[j]}_0 = j\right). \end{aligned}$$

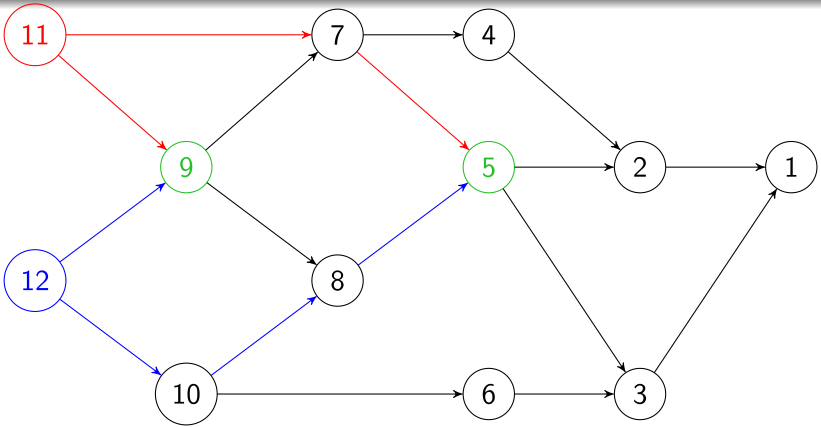
# Contrôle du CED



# Contrôle du CED

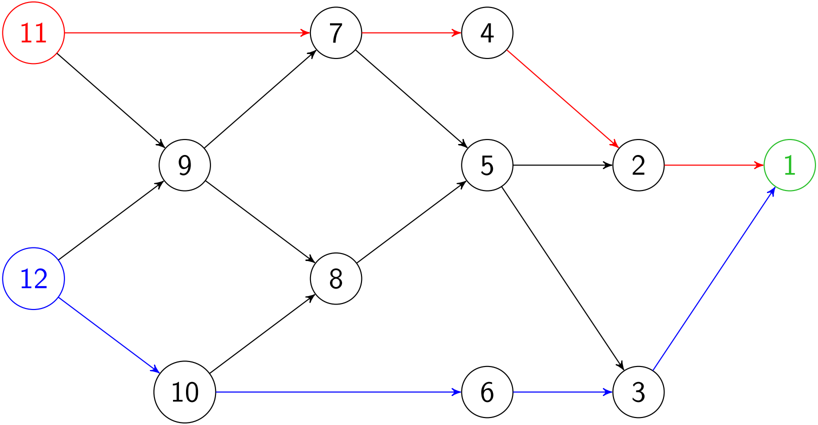


# Contrôle du CED



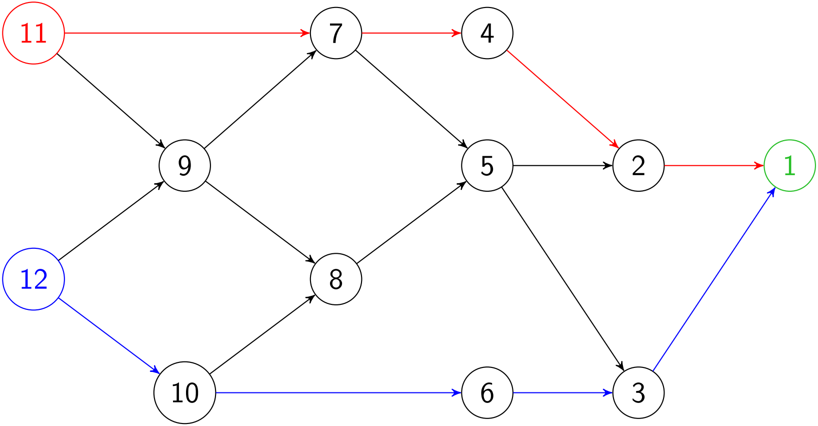

$$\delta(P^*_{0,t}) = \min_{i \neq j} \sum_{k=1}^{n} P^*_{0,t}(i,k) \wedge P^*_{0,t}(j,k).$$

# Contrôle du CED



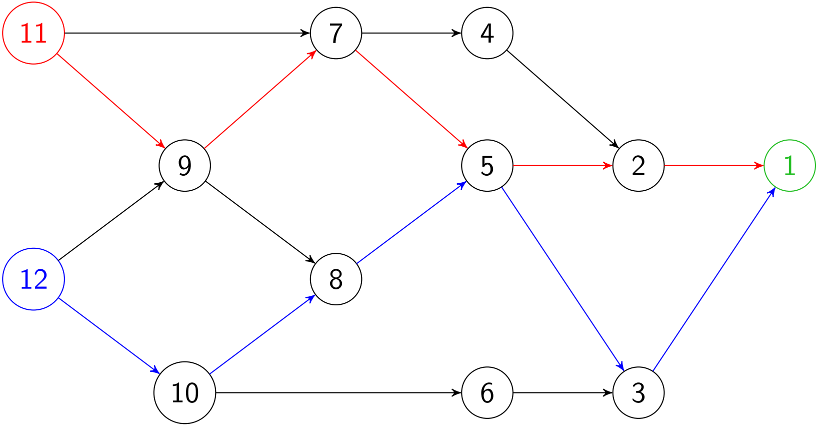

$$\delta(P^*_{0,t}) \geq \min_{i \neq j} P^*_{0,t}(i,1) \wedge P^*_{0,t}(j,1).$$

# Contrôle du CED



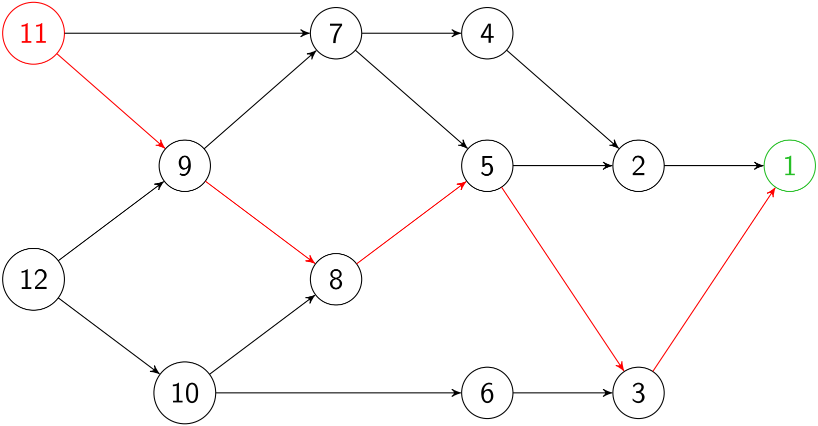

$$\delta(P^*_{0,t}) \geq \min_{i>1} \mathbb{P}\left(Y_t^{[i]} = 1 \mid Y_0^{[i]} = i\right).$$

# Contrôle du CED




$$\delta(P^*_{0,t}) \geq \min_{i>1} \mathbb{P}(J^{[i]}_{h_i} \leq t \mid Y^{[i]}_0 = i).$$

# Contrôle du CED




$$\delta(P^*_{0,t}) \geq \mathbb{P}(\Gamma_h \leq \alpha_t t), \quad \Gamma_h \sim \Gamma(h, 1).$$

# Condition de Flocking

Inégalité de Dobrushin

$$V(t) \leq \left(1 - \delta(P^*_{s,t})\right) V(s)$$

Contrôle du CED

$$1 - \delta(P^*_{s,t}) \leq \mathbb{P}\left(\Gamma_h > \alpha_t(t-s)\right).$$

où $\alpha_t = A^* \psi\left(\sup_{u \leq t} X(u)\right)$

Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$
$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$$

# Condition de Flocking

Inégalité de Dobrushin

$$V(t) \leq \left(1 - \delta(P^*_{s,t})\right) V(s)$$

Contrôle du CED

$$1 - \delta(P^*_{s,t}) \leq \mathbb{P}\left(\Gamma_h > \alpha_t(t-s)\right).$$

où $\alpha_t = A^* \psi\left(\sup_{u \leq t} X(u)\right)$

Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$

$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$$

Condition de flocking

Condition de flocking : $\exists r_0 \geq X(0)$,

$$r_0 > X(0) + V(0) \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\Gamma_h > A^* \psi(r_0) s\right) ds.$$

# Condition de Flocking

Inégalité de Dobrushin

$$V(t) \leq \left(1 - \delta(P^*_{s,t})\right) V(s)$$

Contrôle du CED

$$1 - \delta(P^*_{s,t}) \leq \mathbb{P}\left(\Gamma_h > \alpha_t(t-s)\right).$$

où $\alpha_t = A^*\psi\left(\sup_{u \leq t} X(u)\right)$

Flocking

$$X(t) = \sup_{i \neq j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2,$$

$$V(t) = \sup_{i \neq j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2.$$

$$\sup_{t \geq 0} X(t) < +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$$

Condition de flocking

Condition de flocking : $\exists r_0 \geq X(0)$,

$$r_0 > X(0) + V(0) \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\Gamma_h > A^*\psi(r_0)s\right) ds.$$

Se réécrit :

$$V(0) < C \sup_{r \geq X(0)} (r - X(0))\psi(r).$$

avec $C = \frac{A^*}{h}$.

# Suite : et si $A_{ij}$ est une matrice ?

# Suite : et si $A_{ij}$ est une matrice ?

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i^p}{dt}(t) = v_i^p(t), \\ \dfrac{dv_i^p}{dt}(t) = \alpha \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{q=1}^{d} Q_{ij}^{pq}(t)\big(v_j^q(t) - v_i^q(t)\big), \end{cases}$$

# Suite : et si $A_{ij}$ est une matrice ?

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i^p}{dt}(t) = v_i^p(t), \\ \dfrac{dv_i^p}{dt}(t) = \alpha \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{q=1}^{d} Q_{ij}^{pq}(t)\big(v_j^q(t) - v_i^q(t)\big), \end{cases}$$

Généralisation de l'équation de Dobrushin dans le cas $A_{ij} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ :

**Théorème (C. 2023+)**

$$S(P_{s,t}^* v(0)) \preceq (I_d - \delta_m(P_{s,t}^*))S(v(0))$$

*où*

$$\delta_m(P)^{pq} = \min_{i \neq j} \sum_{k=1}^{n} P_{ik}^{pq} \wedge P_{jk}^{pq} = \delta(P^{pq}).$$